

# 环境流体力学导论

余常昭

清华大学出版社

## 内 容 提 要

本书较系统地介绍了与环境问题有关的流体力学基本知识。全书共分八章。第一章为流体运动的基本概念和基本方程。第二、三章为紊流(湍流)基础,包括紊动的发生、紊流的描述、紊流的基本方程和紊流模型。第四至第八章依次为扩散理论,剪切流中的离散,射流、浮力羽流和浮射流,分层流,及地下水中的弥散,既有基本理论,也注意介绍在地表水、大气和地下水污染分析中的应用。

本书可作为环境工程、水利工程或其他有关专业的研究生课和大学高年级学生选修课的教材或参考书,也可作为与环境有关专业的科研、教学、工程技术人员的参考用书。

(京)新登字 158 号

环境流体力学导论

余常昭

清华大学出版社出版

北京 清华园

印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

开本: 850× 1168 1/32 印张: 12.25 字数: 312 千字

1992 年 10 月第 1 版 1992 年 10 月第 1 次印刷

印数: 0001—3000

ISBN 7-302-01024-2/X · 15

定价: 6.80 元

光华基金会为支持学术专著和研究生教材的出版,给予我社资助,本书即为由光华基金会资助出版的专著之一。

## 重印说明

本次印刷除对 1992 年第一次印刷出稿的印刷错误作了全面的改正,极少量个别文句稍加修改以外,由清华大学水利水电系李玉梁教授提供第一章和第三章至第六章的习题,集中印于正文之后,供读者参考应用。

编者附记

1997 年 11 月

# 前 言

环境问题是当前和人类生存关系至为密切的一个重要问题。为处理好环境问题需要了解自然环境变迁的规律以及研究保护和改善环境的技术。前者如河道演变、水土流失、洪水和飓风的破坏,后者如水资源和大气污染的监测、评价、及其防治保护措施等,许多工作都和流体运动有关。广义说来,环境流体力学包括研究所有和环境问题有关的流体运动的知识;但从狭义说来,则以其中重要而普遍的部分,即污染物质在各种水域和大气中扩散与输移的规律为主要内容。

废水排放的受纳水域有地面的河流、湖泊、水库和海湾等,有些污染物质还可能渗入到地下水域中,如农田的农药、河道中沉积毒物和放射性物质等都可能向地下入渗。由于流体域性质的不同,影响污染物质扩散输移的因素也各异。如深水湖泊、水库中的水体有温度分层的特点,河口、海湾内可能有密度分层、潮汐和风力的作用,工厂烟囱排出的废气在大气中扩散还会受到大气紊动和地表环境等因素的影响。

另一方面,由于污染物性质的不同,在流体中浓度分布的规律也会变化。例如,热污染中温度的分布受热力学因素的影响,化学污染中污染物质受生化作用在水体中有其生长与衰减的过程,重金属污染中则还有固、液两相和吸附等复杂作用。但无论如何,由于流体运动所导致的对含有物质的扩散、输移作用总占重要地位而需要先行分析清楚,这在排放口近区主要是射流运动性质,在远

区则属随流扩散性质。一般研究常从简单情况出发,先不考虑污染物质的存在对流动的影响,即把它作为一种标志物质即示踪物质来分析,而将污染物质的特性部分另行专门处理。

按此考虑,本书先扼要回顾流体运动的基本概念和基本方程,包括几种重要的简化流动类型的理论。由于紊动和扩散的密切关系,以及近年对环境流动已有不少引用较精确的紊流模型进行分析,故在第二、三章介绍一般基础流体力学或水力学课程很少涉及的紊流基础知识。然后再分章介绍扩散理论、剪切流中的离散、紊动射流(包括浮力羽流和浮射流)、分层流以及地下水中的弥散等方面较专门的基本理论和分析方法,以为分析各类环境流体域中物质的扩散、混合与输移问题的基础。至于有关生化作用和地球物理方面属于其他专门著作的内容则未涉及。

本书曾作为清华大学环境工程系和水利系研究生课的教材,其前版是《环境水力学理论基础》讲义(1984年1月),并曾在1985年联合国教科文组织资助的《水环境中污染物混合输移的分析与计算》继续教育进修班上讲授部分内容,后来课程名称改为环境流体力学,故改用本书名,内容也在教学过程中不断修改和补充。对于在研究生阶段另选流体力学课的学生,第一章和第二、三章的部分内容可以不学,此外还可按学时情况对内容按需要选习。环境流体力学是针对环境问题需要而新设的一门技术基础课程,学科本身还在形成发展中。本书内容的安排与材料的取舍,只是编者目前的看法,其中缺点和错误甚盼读者指正。成书过程中得到夏震寰教授的鼓励,张永良、郝吉明、李玉梁、陆琦等同志均曾提供宝贵意见,谨并致谢。

编者

1991年3月

# 主要符号表

本表包括各章通用的主要符号意义, 其他局部使用的符号则在出现时说明。

英文符号:

A	断面面积。
a	加速度。
B	比浮力通量(单位质量流体的浮力通量); 水面宽度。
$B_0$	出口起始断面比浮力通量。
b	射流主体段的半厚度; 槽底宽度。
$b_0$	出口起始断面的射流半厚度。
$b_c$	射流势流核心区的半厚度。
$b_m$	射流混合区的厚度。
$b_e$	流速 $u = u_m/e$ 处的射流半厚度。
$b_{1/2}$	流速 $u = u_m/2$ 处的射流半厚度。
C	各种系数; 槽流摩阻的谢才系数; 断面平均浓度的简写。
$C_D$	阻力系数。
$C_a$	断面平均浓度。
c	浓度场的点浓度。
$c_m$	断面上的最大浓度; 射流轴线浓度。
$c_0$	出口起始断面的浓度。
$c_p$	浓度矩; 定压比热。
$c_v$	定容比热。
D	直径。
$D_m$	分子扩散系数。

$D_t$	紊动扩散系数。
$D_{tl}$	纵向紊动扩散系数。
$D_{tt}$	横向紊动扩散系数。
$D_{ij}$	紊动扩散系数张量。
$D_L$	纵向离散(弥散)系数。
$D_T$	横向离散(弥散)系数。
$D_h$	地下水水动力弥散系数。
$D$	地下水机械弥散系数。
$D_d$	地下水有效分子扩散系数。
$d$	粒径。
$E$	总能量; 能谱密度; 射流的卷吸率。
$E_k$	埃克曼数。
$e$	单位质量流体的内能。
$F$	力; 单位质量流体的质量力; 分布函数; 函数符号。
$F_c$	移流扩散方程的源汇项。
$F_d$	密度弗劳德数。
$F_{d_0}$	出口起始断面的密度弗劳德数。
$F_r$	弗劳德数。
$f$	摩阻系数; 函数符号。
$f_i$	内界面摩阻系数。
$f(r)$	纵向相关系数。
$G$	重力。
$g$	重力加速度。
$g^*$	折减重力加速度
$g_0^*$	出口起始断面折减重力加速度。
$g(r)$	横向相关系数。
$H$	水深。
$h$	水深。
$h_1$	二层流的上层水深。
$h_2$	二层流的下层水深。



$h_c$	临界水深。
$h_0$	出口断面起始水深。
$h_B$	浮力主导的浮射流浮升终点高度。
$h_m$	动量主导的浮射流浮升终点高度。
$I$	积分值。
$I_w$	水面坡度。
$i, i_b$	槽底纵坡。
$i_f$	摩阻坡度。
$K$	综合扩散系数；混合系数。
$K_x$	纵向混合系数。
$K_y$	横向混合系数。
$k$	单位质量流体的紊动动能；波数；渗透系数。
$L$	长度；特性长度；距离。
$L_0$	射流起始段长度。
$l$	普兰特动量传递理论的混合长度。
$l_0$	出口起始断面的特征长度。
$l_Q$	动量射流的流量特征长度。
$l_m$	浮射流综合反映起始浮力和起始动量的特征长度。
$l_a$	综合反映横流与密度分层的特征长度。
$l$	泰勒涡量传递理论的混合长度。
$M$	动量通量；扩散质的总质量。
$M_0$	起始动量通量。
$m$	比动量通量(单位质量流体的动量通量)。
$m_0$	起始比动量通量。
$N$	布伦特-韦伊塞勒频率。
$n$	频率；槽床糙率；孔隙率。
$O$	原点。
$P$	压力；概率。
$Pe$	佩克立数。
$p$	压强；概率密度函数。

Q	体积流量(比质量通量); 扩散质通量; 源强度。
$Q_0$	出口断面起始流量。
$Q_E$	卷吸流量; 欧拉的时间相关(自相关)。
$Q_H$	热通量。
$Q_{ij}$	空间相关。
q	单宽流量。
$q^2$	三个脉动流速分量的平方和。
q	单位面积吸热率。
$q_R$	单位质量流体吸收辐射热率。
R	流速比(射流出口流速/横流流速)。
$R_a$	$1/R$ 。
$R_{ij}$	两随机变量的相关系数。
$R_E(t)$	欧拉的自相关系数。
$R_L(\ )$	拉格朗日的自相关系数。
Re	雷诺数。
Ri	理查森数。
$R_p$	浮羽流的理查森数。
Ro	罗斯比数。
$R_d$	弥散中的阻滞因子。
r	半径; 径距; 径向坐标。
S	变形率张量; 平均稀释度; 分层流体中浮射流的两个综合特征长度之比。
$S_m$	轴线上稀释度。
s	曲线坐标; 曲线段长度; 熵。
T	温度; 周期。
$T_c$	断面混合的时间尺度。
$T_E$	欧拉积分时间比尺。
$T_L$	拉格朗日积分时间比尺。
t	时间。
U	均匀流的纵向流速。

$u_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 欧拉流场直角坐标系的点流速分量, 一般依次为纵向、横向及铅垂向。

$u, v, w$

$u_0, w_0$  射流出口断面起始流速。

$u_a$  横流流速。

$u_i$  二层流的界面流速。

$u_m, w_m$  断面上最大流速; 射流轴线流速。

$v_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 拉格朗日质点速度分量。

$V$  断面平均流速。

$V_1$  二层流的上层流速。

$V_2$  二层流的下层流速。

$v$  柯尔莫戈罗夫速度比尺。

$v_e$  卷吸流速。

$v^*$  摩阻流速。

$W$  功。

$x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 直角坐标系的三个正交坐标, 一般依次为纵向、横向及铅垂向。

$x, y, z$

$z_m$  综合反映浮射流起始动量与横流流速的特征高度。

$z_B$  综合反映浮射流起始浮力与横流流速的特征高度。

希腊字符号:

流体微团邻边夹角; 热扩散系数(导温系数); 卷吸系数。

体积膨胀系数。

重度; 两种比热之比( $c_p/c_v$ )。

速度环量。

边界层厚度。

$\delta$  张量算符。

单位质量流体的能量耗损率; 射流的扩展系数; 无量纲密度差

—。

坐标; 浮射流的一个无量纲高度。

坐标; 无量纲距离; 柯尔莫戈罗夫长度比尺。

二层异重流的科立根数。

	角度。
	紊流的卡门常数。
	波长; 热传导系数; 浓度分布剖面与速度分布剖面的宽度比。
f	紊动的纵向微比尺(纵向耗能比尺)。
g	紊动的横向微比尺(横向耗能比尺)。
f	紊动的纵向积分比尺。
g	紊动的横向积分比尺。
L	拉格朗日扩散长度比尺。
$\mu$	粘滞系数。
$\mu$	无量纲流量比; 稀释度。
	运动粘滞系数。
t	紊动粘性系数(涡粘性系数)。
	均匀流的随流坐标。
	密度。
1	二层流的上层密度。
2	二层流的下层密度。
a	周围环境密度。
0	出口断面起始密度。
m	断面最大密度; 射流轴线密度。
	应力张量。
	标准差, 常数。
2	方差。
k	紊流 k 方程中系数。
	紊流 方程中系数。
	时间; 剪切应力。
0	槽壁剪切应力。
E	紊动的欧拉时间微比尺。
	耗散函数; 射流当地特性参数。
	流速势。
	流函数。

角转速。

$i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 涡量(旋度)。

附加符号:

顶标“ $-$ ”(如  $u$ ) 系综平均值; 时间平均值。

顶标“ $\prime$ ”(如  $u$ ) 脉动值。

顶标“ $\wedge$ ”(如  $u$ ) 偏离值(时均值与断面平均值之差)。

顶标“ $\sim$ ”(如  $c$ ) 潮周平均值。

(如  $c$ ) 断面平均值。

# 目 录

第一章 流体运动的基本概念和基本方程 .....	1
1.1 描述流体运动的几个概念.....	1
1.2 运动流体的应力和变形关系,本构方程 .....	5
1.3 连续方程 .....	10
1.4 运动方程 .....	11
1.5 能量方程 .....	15
1.6 基本方程组的封闭问题 .....	19
1.7 有势流动,拉普拉斯方程.....	20
一、势流特征与拉普拉斯方程 .....	20
二、平面势流 .....	21
1.8 有涡流动,涡量方程.....	23
1.9 边界层概念与边界层方程 .....	27
一、低雷诺数与高雷诺数的流动 .....	27
二、边界层概念 .....	28
三、边界层的微分方程 .....	30
四、边界层的动量积分方程 .....	31
1.10 小密度差流动,布辛涅斯克近似 .....	32
1.11 旋转流体流动,科里奥利力效应 .....	33
第二章 紊流基础(一)——紊动的发生与紊流的描述.....	36
2.1 流动的稳定性 .....	36
2.2 紊动的发生过程 .....	39
一、剪切层 .....	40
二、壁面紊流的发生与猝发现象 .....	41

三、自由紊流的发生与相干结构 .....	44
四、充分发展紊流的特性 .....	49
五、紊流的类型 .....	52
2.3 统计平均法 .....	53
2.4 紊动的概率分布 .....	56
2.5 流速的统计矩 .....	59
2.6 紊流脉动量的相关 .....	62
2.7 紊动比尺 .....	64
2.8 涡旋的拉伸与涡旋级串 .....	68
2.9 紊动能谱 .....	72
第三章 紊流基础(二)——紊流的基本方程与紊流模型.....	78
3.1 紊流的连续方程 .....	78
3.2 紊流的运动方程——雷诺方程 .....	79
3.3 紊流的能量方程 .....	82
一、紊流瞬时流动的能量方程 .....	82
二、紊流时均流动的能量方程 .....	84
三、紊流脉动的能量方程 .....	86
四、紊流边界层中能量的平衡 .....	87
3.4 紊流的涡量方程 .....	91
3.5 紊流模型 .....	93
一、紊流基本方程组的封闭问题与紊流模型的类型 .....	93
二、零方程模型 .....	94
三、一方程模型—— $k$ 方程模型 .....	98
四、二方程模型—— $k$ - 方程模型 .....	100
五、其他模型 .....	102
第四章 扩散理论 .....	104
4.1 概述.....	104
4.2 分子扩散的费克定律, 扩散方程 .....	105
4.3 分子扩散的随机游动分析.....	107
4.4 移流(层流)扩散方程.....	110
4.5 紊动扩散——拉格朗日法.....	112

一、单个质点的紊动扩散——泰勒扩散理论 .....	112
二、两质点的相对扩散 .....	116
4.6 紊动扩散——欧拉法 .....	121
一、紊流扩散方程 .....	121
二、紊动扩散系数 .....	124
4.7 关于扩散方程的求解 .....	126
4.8 静止流体中瞬时源和连续源的扩散 .....	128
一、瞬时源的扩散 .....	128
二、连续源的扩散 .....	134
4.9 均匀紊流中的扩散 .....	138
一、均匀紊流中瞬时源扩散的浓度分布 .....	139
二、均匀紊流中连续源扩散的浓度分布 .....	140
4.10 有边界反射的扩散 .....	142
一、固体边界的反射 .....	142
二、大气中扩散的逆温层反射 .....	144
第五章 剪切流中的离散 .....	150
5.1 一维纵向移流离散方程 .....	150
5.2 圆管流动中的离散 .....	154
一、圆管层流中的离散 .....	154
二、圆管紊流中的离散 .....	158
5.3 宽矩形断面明槽流动中的离散 .....	159
5.4 紊流边界层中的离散 .....	162
5.5 非定常剪切流中的离散 .....	166
5.6 平面二维流动中的离散 .....	171
5.7 浓度矩法 .....	172
5.8 天然河流中的离散 .....	175
一、河流中混合的几个阶段 .....	175
二、河流的紊动扩散系数 .....	176
三、河流的纵向离散系数 .....	178
四、感潮河段的离散 .....	183
第六章 射流、浮力羽流和浮射流 .....	187



6.1	概述.....	187
	一、射流的类型 .....	187
	二、紊动射流的特性 .....	188
	三、射流问题的分析途径 .....	199
6.2	等密度自由紊动射流.....	201
	一、平面自由紊动射流的动量积分解 .....	201
	二、平面自由紊动射流的微分方程解 .....	208
	三、圆形断面自由紊动射流的动量积分解 .....	211
	四、圆形断面自由紊动射流的微分方程解 .....	215
	五、矩形断面喷口的自由紊动射流 .....	219
6.3	浮力羽流.....	227
	一、浮羽流的基本方程与求解 .....	228
	二、浮羽流的量纲分析解成果 .....	235
6.4	自由紊动浮射流.....	238
	一、自由紊动浮射流的积分方程及其数值解 .....	239
	二、自由紊动浮射流的量纲分析解 .....	254
	三、自由紊动浮射流的微分方程 $k$ - 模型解 .....	261
6.5	横流中的紊动射流.....	268
	一、垂直向上射入横流中的等密度圆形断面紊动射流 .....	268
	二、垂直向上射入横流中的浮射流 .....	275
	三、从侧边水平射入横流中的浮射流 .....	278
	四、关于烟囱喷流扩散的补充 .....	280
6.6	分层流体中的紊动射流.....	283
	一、静止分层流体中的自由紊动浮射流 .....	283
	二、分层横流中的浮射流 .....	289
	三、烟囱喷流浮升高度的经验估算 .....	293
6.7	表面射流.....	295
第七章	分层流 .....	307
7.1	概述.....	307
7.2	静止流体的分层与稳定.....	308
	一、湖泊、水库和海洋中水体的分层 .....	308

二、大气的分层 .....	309
三、大气的平衡 .....	311
四、分层流体平衡的稳定 .....	312
7.3 明槽中二层异重流 .....	314
一、下层均匀流动 .....	316
二、二层定常非均匀渐变流方程 .....	319
三、盐水楔 .....	322
四、内水跃 .....	324
7.4 内波及内界面的稳定 .....	326
一、内波种类 .....	326
二、界面内波的运动 .....	328
三、内界面的稳定 .....	333
7.5 分层水域的泄流——选择取水问题 .....	334
一、堵塞现象 .....	334
二、在二层水域中取下层水 .....	335
三、在二层水域中取上层水 .....	338
四、其他选择取水方式 .....	341
第八章 地下水中的弥散 .....	342
8.1 孔隙介质中弥散的特点 .....	342
8.2 弥散模型与弥散方程 .....	344
8.3 水动力弥散系数 .....	346
一、量纲分析 .....	347
二、在示踪输移情况下弥散系数的实验成果 .....	348
8.4 渗流弥散方程的简单解析解 .....	351
一、无限域中保守性示踪剂源的弥散 .....	351
二、无限长柱体中示踪剂的一维弥散 .....	351
三、柱体中有放射性衰减的示踪剂的弥散 .....	353
四、平面均匀流中初始有突变界面的弥散 .....	356
五、平面径向流中的弥散 .....	358
参考文献 .....	360

# 第一章 流体运动的基本概念 和基本方程

为便于进行以后各章较为专门问题的讨论,本章将较系统地  
对流体运动的基本概念和基本方程作一回顾,其中在一般大学本  
科流体力学或水力学教材中已有的内容,不再详细推导公式,一般  
教材中没有而对研究环境问题有需要的概念和方程,则作必要的  
补充。

## 1.1 描述流体运动的几个概念

### 一、连续介质假设

实际流体的结构是由彼此间有空隙并进行复杂微观运动的大  
量分子所组成。由于流体力学研究的是流体的宏观机械运动,一般  
引入连续介质的假设,认为流体所占有的空间连续而无空隙地充  
满着流体质点(也称流体微团),质点的尺度在微观上足够大,大到  
能包含大量的分子,使得在统计平均后能得到其物理量的确定值;  
质点的尺度在宏观上又足够小,远小于所研究问题的特征尺度,使  
得其平均物理量可看成是均匀的;而且可以把质点看成是几何上  
的一个点。

有了连续介质假设就可以把流体的物理量作为空间坐标和时  
间的连续函数,充分利用数学分析这个有力的工具来解决问题。

## 二、流动的基本特性参量

实际工作中要了解流体的运动就要知道表述流动特性的物理量的大小。这些物理量中,描述运动状态的主要是速度  $v$ , 和运动有密切关系的流体特性有压强  $p$ , 密度  $\rho$ , 温度  $T$  及含有物的浓度  $c$  等, 可统称为流动的基本特性参量。其中速度和压强是矢量, 密度、温度和浓度则是标量。

流体力学中描述流体运动的方法有拉格朗日法和欧拉法。拉格朗日法以研究个别流体质点的运动为基础, 通过对各个质点运动的研究来获得整个流体的运动规律。对于直角坐标系, 以初始时刻流体质点的坐标  $a, b, c$  作为区分质点的标志, 称为拉格朗日变数, 任何时刻  $t$  任何质点在空间的位置是拉格朗日变数和时间的函数

$$r = r(a, b, c, t) \quad (1.1)$$

或

$$x = x(a, b, c, t)$$

$$y = y(a, b, c, t) \quad (1.1a)$$

$$z = z(a, b, c, t)$$

质点的速度和加速度可由式(1.1)对时间  $t$  的一阶偏导数和二阶偏导数得到。

虽然以后在个别问题中会用到拉格朗日法, 一般常用的是欧拉法。欧拉法是在流动空间中, 描述空间各固定点上流体通过它时的运动状态, 也就是空间固定点上各个流动特性参量的大小。这些参量是空间点的坐标和时间的函数。用直角坐标表示为

$$v = v(x, y, z, t) \quad (1.2)$$

$$p = p(x, y, z, t) \quad (1.3)$$

---

和一般习惯不同, 这里把含有物浓度  $c$  也列为基本特性参量, 以突出它在环境问题中的重要性。

$$= (x, y, z, t) \quad (1.4)$$

$$T = T(x, y, z, t) \quad (1.5)$$

$$c = c(x, y, z, t) \quad (1.6)$$

也就是研究确定包含有时间变化的矢量场或标量场, 统称流场。这样就可以利用数学上场论的知识。

### 三、流线

拉格朗日法描述的质点运动过程, 几何上可用轨迹线, 简称迹线来表示。在欧拉法则建立流线的概念。流线是在流场中表示在同一时刻各空间点上流体质点运动方向的曲线, 线上任一点的切线方向与流体在该点的速度方向一致。按此定义流线的微分方程为

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1.7)$$

或 
$$v \times dr = 0 \quad (1.7a)$$

在具体的边界条件下求得流线的方程就可以在流场中绘出流线图形, 也称为流谱, 它可清晰地表示出流动的状态。图 1.1 为流线及典型流谱的示例。

### 四、质点导数(随体导数)

流体质点的速度对时间的变率即为质点的加速度  $a$ , 对于直角坐标系

$$\begin{aligned} a &= \frac{Dv}{Dt} = \frac{v}{t} + \frac{v}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{v}{y} \frac{dy}{dt} + \frac{v}{z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{v}{t} + u \frac{v}{x} + v \frac{v}{y} + w \frac{v}{z} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$= \frac{v}{t} + v \cdot \nabla v \quad (1.8a)$$

图 1.1 流线及流谱

式中:  $\frac{v}{t}$  为当地加速度;  $(v \cdot \text{è})v$  为迁移加速度。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{v}{t} + v \cdot \text{è} \quad (1.9)$$

称为质点导数, 或随体导数。对于流场中的任何流动参量  $B$  (如  $\rho$ 、 $T$  等) 都可以求它对时间的全导数, 即质点导数

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{v}{t} + v \cdot \text{è} B \quad (1.10)$$

式中右边依次为它的当地变率项和迁移变率项。

对于柱坐标系, 令  $r$ 、 $\theta$ 、 $z$  分别为径向、方位角和轴向的坐标, 质点导数为

$$\frac{D}{Dt} = \frac{v}{t} + v_r \frac{1}{r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} + v_z \frac{d}{dz} \quad (1.11)$$

在以后各章中会看到式(1.10)的广泛应用。

## 1.2 运动流体的应力和变形关系, 本构方程

运动着的流体由于速度场的不均匀性而产生变形, 流体内部存在应力, 应力与变形的关系是分析流动的一个重要问题。

### 一、流体微团运动的分解

取一个微小正交六面体流体单元来分析, 图 1.2 表示它在  $x-y$  平面上的投影。微团 ABCD 经过时间  $dt$  后移动至 A' B' C' D' 的位置, 形状也发生改变, 这是 A、B、C、D 各点流速不同的结果。经过移动变形后, 各点的位置和流速变率之间的关系如图所示。这个运动结果可以看作是由下列四种基本形式的运动组合而成:

1. 平移 微团形状不变, 整个平行移动。

图 1.2 流体微团运动的分解

2. 线变形 各边伸长或缩短。
3. 角变形 相邻正交的两边夹角发生变化, 微团形状改变。
4. 转动 微团整个象刚体一样转动。

各种基本运动对时间的变率在各方向的分量可表示如下:

平移速度  $u, v, w$

$$\text{线变率} \quad S_{xx} = \frac{u}{x}, S_{yy} = \frac{v}{y}, S_{zz} = \frac{w}{z} \quad (1.12)$$

角变率

$$\begin{aligned} S_{xy} = S_{yx} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{v}{x} + \frac{u}{y} \right) \\ S_{yz} = S_{zy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{w}{y} + \frac{v}{z} \right) \\ S_{zx} = S_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{u}{z} + \frac{w}{x} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

角转速

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{v}{x} - \frac{u}{y} \right) \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{w}{y} - \frac{v}{z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{u}{z} - \frac{w}{x} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

对于变形部分可综合写为变形率张量  $S$

$$S = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix}$$

由此可以把流场中任何邻近两点速度的变化关系用微团基本运动的组合来表达。设流场中任一点  $O$  的流速分量为  $u_0, v_0, w_0$ , 距  $O$  点  $ds$  处某点的流速分量为  $u, v, w, u = u_0 + du, v = v_0 + dv, w =$



$w_0 + dw$ 。将  $du$  按泰勒级数展开

$$du = \frac{u}{x_0} dx + \frac{u}{y_0} dy + \frac{u}{z_0} dz$$

配项整理代入  $u$  式, 并用(1.12)、(1.13)、(1.14)各式关系, 可得

$$u = u_0 + \omega_y dz - \omega_z dy + S_{xx} dx + S_{xy} dy + S_{xz} dz$$

同理  $v = v_0 + \omega_z dx - \omega_x dz + S_{yy} dy + S_{yz} dz + S_{yx} dx$

$$w = w_0 + \omega_x dy - \omega_y dx + S_{zz} dz + S_{zx} dx + S_{zy} dy$$

(1.15)

各式右边第一项为平移速度; 第二、三项为转动产生的速度增量; 第四、第五和第六项分别为线变形和角变形产生的速度增量。所以, 流场中任一点的流速一般都可以认为由平移、转动和变形三部分组合而成。

## 二、运动流体的应力

运动着的有粘滞性的流体内部存在压应力和切应力。通过任一点取正交于  $x$  轴的平面, 作用于平面上该点有法向应力 $-p_{xx}$  (“ $-$ ”号表示其方向与  $x$  轴正方向相反) 及切应力 $\tau_{xy}$  和  $\tau_{xz}$  (第一个下标表示作用面的法线方向, 第二个下标表示应力的作用方向)。同样在正交于  $y$  轴的平面上作用的应力有 $-p_{yy}$ 、 $\tau_{yx}$  和  $\tau_{yz}$ ; 在正交于  $z$  轴的平面上作用的应力有 $-p_{zz}$ 、 $\tau_{zx}$  和  $\tau_{zy}$ 。这样, 任一点在三个正交的作用面上的应力共有 9 个分量, 可排列为

$$\begin{matrix} -p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -p_{zz} \end{matrix} =$$

称为应力张量。其中可证明

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned}$$

因而只有 6 个是独立的。过该点任何方向的平面上的应力都是这 6 个应力的函数。

### 三、应力和变形的关系, 本构方程

流体的种类不同, 其应力和变形的关系也不同。反之, 可按应力和变形的关系来区分流体的类型。

从体积变形和压应力的关系看, 体积为  $dx dy dz$  的流体微团经时间  $dt$  后, 由于边长改变, 其体积膨胀量为

$$\begin{aligned} dx + \frac{u}{x} dx dt \quad dy + \frac{v}{y} dy dt \quad dz + \frac{w}{z} dz dt - dx dy dz \\ \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} dx dy dz dt \end{aligned}$$

单位体积在单位时间的膨胀量, 即体积膨胀率为  $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z}$   
 $= \dot{\epsilon} \cdot v$ 。当  $\dot{\epsilon} \cdot v = 0$ , 则体积压缩系数  $= - \frac{dV}{V} / dp = 0$ , 流体就是不可压缩的。反之, 当  $\dot{\epsilon} \cdot v \neq 0$ , 则为可压缩流体。

从角变形和切应力的关系看, 如用指数形式表示为

$$S^n$$

当  $n = 1$  时为牛顿流体, 其本构关系为牛顿内摩擦定律。当  $n \neq 1$  时为非牛顿流体, 其应力与变形率的关系一般是非线性的。环境问题中虽然也会遇到非牛顿流体, 但大多数都属于牛顿流体, 本书也限于讨论牛顿流体。

对于牛顿流体, 按牛顿内摩擦定律, 在二维平行直线流动中的切应力为

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \mu \frac{du}{dy} \\ &= \mu \frac{d}{dt} \end{aligned}$$

式中  $\mu$  为粘滞系数,  $\theta$  为微团邻边的夹角。将这个切应力与角变率

的线性关系推广到一般空间流动, 斯托克斯作了应力与变形速率成线性关系和这个关系在流体中各向同性的假定, 在三个正交平面上可得出切应力的关系式

$$\begin{aligned} \tau_{yx} = \tau_{xy} &= 2\mu s_{xy} = \mu \frac{v}{x} + \frac{u}{y} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= 2\mu s_{yz} = \mu \frac{w}{y} + \frac{v}{z} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= 2\mu s_{zx} = \mu \frac{u}{z} + \frac{w}{x} \end{aligned} \quad (1.16)$$

对于压应力, 在静止流体中它是各向相等的。在流动流体中因有粘滞性在起作用, 一般说  $p_{xx}$   $p_{yy}$   $p_{zz}$ 。但可以证明在同一点上, 三者之和与这组正交平面的方向无关, 即不论坐标轴怎样转动,  $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$  值保持不变。因此, 取三者的平均值, 以  $p$  表示, 即

$$p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \quad (1.17)$$

则  $p = p(x, y, z, t)$  成为一个标量函数。于是可表示

$$p_{xx} = p + p_{xx}$$

$$p_{yy} = p + p_{yy}$$

$$p_{zz} = p + p_{zz}$$

$p_{xx}$ 、 $p_{yy}$  及  $p_{zz}$  可认为是由于粘滞性作用所引起的加在平均值上的附加应力。从斯托克斯的假定出发可以推得

$$\begin{aligned} p_{xx} &= p + \frac{2}{3}\mu \nabla^2 v - 2\mu \frac{u}{x} \\ p_{yy} &= p + \frac{2}{3}\mu \nabla^2 v - 2\mu \frac{v}{y} \\ p_{zz} &= p + \frac{2}{3}\mu \nabla^2 v - 2\mu \frac{w}{z} \end{aligned} \quad (1.18)$$

式(1.16)和式(1.18)称为各向同性的牛顿流体的本构方程。实际

流体都具有粘滞性, 没有粘滞性的流体称为理想流体, 是一个简化的概念。

### 1.3 连续方程

流体流动参量的变化必然也遵循物理学的普遍定律, 这些普遍定律在流体运动上的表现形式写成数学上的表达式即成为支配流体运动的基本方程。

第一个基本方程是连续方程。它是以流体作为连续介质的前提下, 质量守恒定律在流体运动上的表现形式。

图 1.3 为流动空间中的一个微小六面体, 以它作为空间的一个控制体积, 分析流入、流出这个控制体积的流体质量与控制体积内部流体质量变化之间的关系, 在连续性的前提下, 按质量守恒定律可得出可压缩流体的欧拉型连续性微分方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.19)$$

图 1.3 控制体积的入流与出流

它的矢量形式为

$$\frac{\rho}{t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.19a)$$

将式(1.19)展开得

$$\frac{\rho}{t} + u \frac{\rho}{x} + v \frac{\rho}{y} + w \frac{\rho}{z} + \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0$$

即

$$\frac{D}{Dt} + \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0 \quad (1.20)$$

对于不可压缩流体,质点在运动过程中其密度不改变,密度的质点导数  $\frac{D}{Dt} = 0$ , 由式(1.20)得

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0 \quad (1.21)$$

或

$$\text{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\text{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1.21a)$$

对于等密度的流体,  $\rho = \text{const}$ , 由式(1.20)也得到式(1.21)。式(1.21)即为不可压缩流体的连续性微分方程。

连续性微分方程不论是定常流或非定常流,实际流体或理想流体均可适用。

连续方程的积分形式是

$$\int_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = - \frac{d}{dt} \quad (1.22)$$

式中  $A$  为有限控制体的封闭表面面积,  $\mathbf{n}$  是面的外法线单位矢量, 是控制体的体积。对于一维流动, 则有

$$\rho_m V A = \text{const} \quad (1.23)$$

式中  $\rho_m$  为断面平均密度;  $V$  为断面平均流速,  $A$  为断面面积。

## 1.4 运动方程

流体运动的第二个基本方程是运动方程,它是牛顿第二运动

定律在流体运动上的表现形式, 也称为动量方程。

在流场中取微小流体六面体作为隔离体进行分析。作用于此六面体的表面力如图 1.4 所示, 作用于每单位质量流体的质量力为  $F$ , 它的三个分量为  $X, Y, Z$ , 六面体的质量为  $dx dy dz$ 。按牛顿运动定律  $f = ma$ , 可推导出以应力表示的流体运动方程为

$$\begin{aligned}
 X + \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) &= \frac{Du}{Dt} \\
 Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) &= \frac{Dv}{Dt} \\
 Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) &= \frac{Dw}{Dt}
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

图 1.4 作用于流体微元的各种力

对于牛顿流体,将应力和变形率关系的本构方程(1.16)、(1.18)代入式(1.24),得到

$$\begin{aligned}
 \frac{Du}{Dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{p}{x} + \frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{u}{x} - \frac{2}{3} \epsilon_{ij} v_j \right) \\
 &\quad + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{u}{y} + \frac{v}{x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{w}{x} + \frac{u}{z} \right) \\
 \frac{Dv}{Dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{p}{y} + \frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{v}{y} - \frac{2}{3} \epsilon_{ij} v_j \right) \\
 &\quad + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{v}{z} + \frac{w}{y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{u}{y} + \frac{v}{x} \right) \\
 \frac{Dw}{Dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{p}{z} + \frac{\mu}{\rho} \left( 2 \frac{w}{z} - \frac{2}{3} \epsilon_{ij} v_j \right) \\
 &\quad + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{w}{x} + \frac{u}{z} + \frac{\mu}{\rho} \frac{v}{z} + \frac{w}{y} \right)
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

这就是粘性流体的运动微分方程,常称为纳维-斯托克斯方程(N-S方程),是流体力学的重要理论基础公式。

对于不可压缩流体,  $\epsilon_{ij} v_j = 0$ , 式(1.25)简化后并将  $\frac{D}{Dt}$  项展开得

$$\begin{aligned}
 \frac{u}{t} + u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} + w \frac{u}{z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{p}{x} + \frac{\mu}{\rho} \epsilon_{ij}^2 u \\
 \frac{v}{t} + u \frac{v}{x} + v \frac{v}{y} + w \frac{v}{z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{p}{y} + \frac{\mu}{\rho} \epsilon_{ij}^2 v \\
 \frac{w}{t} + u \frac{w}{x} + v \frac{w}{y} + w \frac{w}{z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{p}{z} + \frac{\mu}{\rho} \epsilon_{ij}^2 w
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

式中拉普拉斯算符  $\epsilon_{ij}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。式(1.26)即为不可压缩粘性流体的运动方程,其矢量形式为

$$\frac{v}{t} + (v_j \epsilon_{ij}) v = F - \frac{1}{\rho} \epsilon_{ij} p + \frac{\mu}{\rho} \epsilon_{ij}^2 v \tag{1.26a}$$

对于理想流体,  $\mu = 0$ , 运动方程进一步简化为

$$\begin{aligned}
\frac{u}{t} + u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} + w \frac{u}{z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{p}{x} \\
\frac{v}{t} + u \frac{v}{x} + v \frac{v}{y} + w \frac{v}{z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{p}{y} \\
\frac{w}{t} + u \frac{w}{x} + v \frac{w}{y} + w \frac{w}{z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{p}{z}
\end{aligned}
\tag{1.27}$$

称为欧拉运动方程。

在柱坐标系中不可压缩流体的纳维-斯托克斯方程的形式为

$$\begin{aligned}
\frac{v_r}{t} + v_r \frac{v_r}{r} + \frac{v}{r} \frac{v_r}{r} - \frac{v^2}{r} + v_z \frac{v_r}{z} &= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{p}{r} \\
+ \mu \left[ \frac{2}{r^2} \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{v_r}{r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{v_r^2}{r} - \frac{2}{r^2} \frac{v}{r} + \frac{2}{z^2} \frac{v_r}{r} \right] \\
\frac{v}{t} + v_r \frac{v}{r} + \frac{v}{r} \frac{v}{r} + \frac{v_r v}{r} + v_z \frac{v}{z} &= F - \frac{1}{\rho} \frac{p}{r} \\
+ \mu \left[ \frac{2}{r^2} \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{v}{r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{v^2}{r} + \frac{2}{r^2} \frac{v_r}{r} + \frac{2}{z^2} \frac{v}{r} \right] \\
\frac{v_z}{t} + v_r \frac{v_z}{r} + \frac{v}{r} \frac{v_z}{r} + v_z \frac{v_z}{z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{p}{z} \\
+ \mu \left[ \frac{2}{r^2} \frac{v_z}{r} + \frac{1}{r} \frac{v_z}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{v_z^2}{r} + \frac{2}{z^2} \frac{v_z}{r} \right]
\end{aligned}
\tag{1.28}$$

相应的连续方程为

$$\frac{v_r}{r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{v}{r} + \frac{v_z}{z} = 0
\tag{1.29}$$

积分型的运动方程常用动量积分方程的形式

$$F d + \int_A p_n dA - \int_A (v_j \rho n_j) v dA = \frac{d}{dt} \int_V \rho v dV
\tag{1.30}$$

上式表示：作用于控制体内流体上的外力加单位时间内通过控制面流入的流体动量等于控制体内的动量对时间的变化率。



## 1.5 能量方程

实际流体有粘滞性,粘滞切应力做功而消耗机械能,这些机械能是以转化为热能的方式而耗损的,所以能量守恒的关系对于实际流体来说应同时考虑机械能和热能在内。设以  $e$  表示单位质量流体所含有的内能,它是状态的函数,包括各种形式的能量,如随温度和压力变化的狭义的内能、化学能和电磁能等等。单位质量流体的动能为  $v^2/2$ 。对于一个体积为  $\sigma$  的确定系统的能量守恒关系可表达为

$$Q_H + W = \frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\sigma} e + \frac{v^2}{2} d \quad (1.31)$$

式中  $Q_H$  为单位时间内由外界传入该系统的热量,  $W$  为外力对系统所作的功。式右边为系统的总能量  $E$  对时间的变化率。

$$Q_H = \int_{\sigma} q_R d\sigma + \int_A q dA \quad (1.32)$$

$q_R$  为单位时间内由于辐射及其他原因传入系统内单位质量流体上的热量;  $q$  为单位时间内通过系统表面单位面积传入的热传导量。

$$W = \int_{\sigma} (F \cdot j\alpha v) d\sigma + \int_A (p_n \cdot j\alpha v) dA \quad (1.33)$$

式中右边第一项为单位时间内作用于系统的单位质量流体上的质量力所作的功; 第二项为作用于系统的表面力的总功率,  $p_n$  为作用于表面的应力。

对于用欧拉法描述的流场,取一个空间坐标固定的控制体分析,能量方程可写为:

$$\int_A q dA + \int_{\sigma} q_R d\sigma + \int_{\sigma} (F \cdot j\alpha v) d\sigma + \int_A (p_n \cdot j\alpha v) dA$$

$$-\int_A \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \frac{d}{dt} \int_V \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV \quad (1.34)$$

式中前 4 项的意义同前述； $-\int_A \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$  表示单位时间内通过控制面流入的总能量（ $\mathbf{n}$  是外法线方向，故有“-”号）；等式右边代表单位时间内控制体中总能量的增量。这样，适用于控制体的能量守恒原理可叙述如下：单位时间内传给控制体内流体的热能和外界对控制体内流体所作的功与通过控制面流入的总能量之和，等于控制体内流体的总能量对时间的变化率。

能量方程(1.34)也可以改写为另一形式

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_V (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dV + \int_A (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v}) dA + \int_V q_R dV + \int_A q dA \quad (1.35)$$

由此式可推导微分形式的能量方程如下：

考虑到  $\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$ ， $\mathbf{T}$  为应力张量；

又由傅立叶定律

$$\mathbf{q} = -\frac{\mathbf{T}}{n} = -n \mathbf{j}^q \mathbf{e}_T \quad (1.36)$$

式中  $k$  为热传导系数， $T$  为温度。利用推广的高斯公式将式(1.35)中的面积分化为体积分，有

$$\int_A (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v}) dA = \int_V (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}^p) \cdot \mathbf{v} dV = \int_V [\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}^p(\mathbf{v})] dV \quad (1.37)$$

$$\int_A q dA = \int_V (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}^q \mathbf{e}_T) dV = \int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}^q(\mathbf{e}_T) dV \quad (1.38)$$

于是式(1.35)成为

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left( e + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_V (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}^p(\mathbf{v})) dV$$

$$- q_R - \dot{\epsilon} \int_V (\dot{\epsilon} T) dV = 0 \quad (1.39)$$

若式中各物理量及其一阶导数连续, 由被积函数的连续性及积分区间的任意性可知, 要使上式成立, 必须在空间任一点均满足下式:

$$\frac{D}{Dt} e + \frac{v^2}{2} = F \int_V \dot{\epsilon} + \dot{\epsilon} \int_V (\dot{\epsilon} v) + q_R + \dot{\epsilon} \int_V (\dot{\epsilon} T) \quad (1.40)$$

或写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} e + \frac{v^2}{2} + (v \int_V \dot{\epsilon}) e + \frac{v^2}{2} &= F \int_V \dot{\epsilon} + \frac{1}{t} \dot{\epsilon} \int_V (\dot{\epsilon} v) \\ &+ \frac{1}{t} \dot{\epsilon} \int_V (\dot{\epsilon} T) + q_R \end{aligned} \quad (1.41)$$

此式即微分形式的能量方程。

在直角坐标系中, 式(1.41)成为

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} e + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) \\ = (uX + vY + wZ) + \frac{\partial}{\partial x}(-p_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w) \\ + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u - p_{yy}v + \tau_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}u + \tau_{zy}v - p_{zz}w) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \frac{T}{x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{T}{y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{T}{z} + q_R \end{aligned} \quad (1.42)$$

将方程(1.42)右边应力与速度乘积的导数项展开, 经整理并项并用式(1.24)的关系, 可简化为

$$\begin{aligned} \frac{De}{Dt} &= -p_{xx} \frac{u}{x} - p_{yy} \frac{v}{y} - p_{zz} \frac{w}{z} \\ &+ \tau_{xy} \frac{v}{x} + \frac{u}{y} + \tau_{yz} \frac{w}{y} + \frac{v}{z} + \tau_{zx} \frac{u}{z} + \frac{w}{x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \frac{T}{x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{T}{y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{T}{z} + q_R \end{aligned} \quad (1.43)$$

对于大多数流体有

$$e = c_v T \quad (1.44)$$

引入热扩散率(导温系数)

$$= \frac{\mu}{c_p} \quad (1.45)$$

式中  $c_v$  为定容比热;  $c_p$  为定压比热。对于液体两种比热接近相等, 设为常数  $c$ , 并将式(1.43)的各应力做功项综合表示为  $\mu$ , 称为耗散函数, 则方程(1.43)可写为

$$\frac{DT}{Dt} = \dot{\epsilon}^2 T + \frac{\mu}{c} + \frac{q_R}{c} \quad (1.46)$$

略去粘性耗散项和辐射项时上式简化为

$$\frac{T}{t} + u \frac{T}{x} + v \frac{T}{y} + w \frac{T}{z} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1.47)$$

在柱坐标系表示为

$$\begin{aligned} & \frac{T}{t} + v_r \frac{T}{r} + \frac{v}{r} \frac{T}{r} + v_z \frac{T}{z} \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.48)$$

上述三种基本方程都有相同的下列形式

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{B}{t} + u \frac{B}{x} + v \frac{B}{y} + w \frac{B}{z} = Q \quad (1.49)$$

式中  $\frac{D}{Dt}$  为物理量  $B$  在流动过程中的总变化率, 即 1.1 节提到的质点导数,  $Q$  是导致  $B$  变化的因素。三种方程的  $B$  项和  $Q$  项不同:

基本方程	B 项	Q 项
连续方程(1.20)		$-\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z}$
运动方程(1.26a)	$v$	$F - \dot{\epsilon} p + \mu \dot{\epsilon}^2 v$
能量方程(1.41)	$e + \frac{v^2}{2}$	$F \cdot v + \frac{1}{c} \dot{\epsilon} \cdot (\quad \cdot v) + \frac{1}{c} \dot{\epsilon} \cdot (\dot{\epsilon} T) + q_R$

或(1.46) 
$$\frac{\partial}{\partial t} T + \frac{\mu}{c} + \frac{q_R}{c}$$

具有式(1.49)形式的方程称为守恒型方程, 整个方程反映物理量 B 的平衡关系。上述三种方程分别表示流体的质量守恒、动量守恒和能量守恒的关系。以后还会讨论到其他物理量的守恒型方程。

## 1.6 基本方程组的封闭问题

连续方程(1.19)、运动方程(1.25)和能量方程(1.41)是一般流体运动微分形式的基本方程组。其中设  $F, q_R, \mu$  和  $\rho$  都是已知, 独立的未知量有  $v$  的分量,  $e, T$  和  $\rho$  的分量共 12 个, 而方程只有 5 个, 所以方程组是不封闭的。

为了使方程组封闭必须补充 7 个方程, 它只能由一系列其他条件或假设来提供。这些条件或假设则要按各种不同种类的流体和流动的类型分别进行研究。

对于牛顿流体, 应力和变形率有线性关系, 由此可去掉  $\rho$  的 6 个变量, 但又引入一个变量  $p$ , 合计有 7 个变量, 除已有 5 个方程外尚要找 2 个方程才能封闭。这 2 个方程可以从热力学找到。例如对于完全气体, 其状态方程为

$$p = \rho R T \quad (1.50)$$

和 
$$e = c_v T \quad (1.44)$$

对于真实气体, 其状态方程就多种多样了。

对于不可压缩流体,  $\rho = \text{const}$ , 则由连续方程和运动方程即可组成求解  $p, v$  的封闭方程组, 然后再由能量方程求温度场。

对于理想流体, 运动方程是欧拉方程, 在连续方程和运动方程以外, 常假设为正压流体, 加入一个联系  $p, \rho$  的热力学关系式  $f(p, \rho) = 0$ : 如定容(等密度)、等温、绝热等过程的关系式, 于是共有 5 个方程, 可求解  $\rho, p, v$  5 个变量。

如为理想不可压缩流体, 则只需求解连续方程和运动方程了。

以上讨论不同种类流体基本方程组的封闭问题, 但不论是哪一种情况, 对这种偏微分方程一般不易求解。故对于实际问题多要按具体情况对方程进行简化, 以下将讨论一些简化的流动。

## 1.7 有势流动, 拉普拉斯方程

### 一、势流特征与拉普拉斯方程

流体运动时, 当流体微团没有转动, 其角转速  $\omega = 0$ , 称为无旋流。对这类流动的分析可以简化很多。理论可以证明, 对于正压流体, 在有势质量力(如重力)作用下, 流体的运动如果本来是无旋的, 若不考虑粘性的作用, 以后发展的流动也将是无旋的, 例如从静止开始的理想流体流动就属于这种情况。严格说来这是理想情况, 但有许多实际问题按无旋流来分析, 在一定条件下也能得到较好的近似解决。

无旋流的基本特征是  $\omega = 0$ , 按式(1.14)流速场必须满足下列条件:

$$\frac{u}{y} = \frac{v}{x} \quad \frac{v}{z} = \frac{w}{y} \quad \frac{w}{x} = \frac{u}{z} \quad (1.51)$$

从数学知道这是使  $u dx + v dy + w dz$  是某一函数  $\phi$  的全微分的必要和充分条件, 即

$$u dx + v dy + w dz = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad (1.52)$$

所以有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = w \quad (1.53)$$

这个标量函数  $\phi(x, y, z)$  称为流速势, 故无旋流动又称为有势流动, 简称势流。对于非定常情况, 流速势应是时间的函数, 即  $\phi(x, y, z, t)$ ,  $t$  是个参变数。

将式(1.53)代入不可压缩流体的连续方程(1.21)得到

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.54)$$

或写为 
$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.54a)$$

上式称为拉普拉斯方程。

这样, 势流问题就归结为在一定边界条件下求解拉普拉斯方程的问题。确定流速势  $\phi$  以后, 由式(1.53)即可求出速度分量  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 。再按欧拉方程积分可求压强  $p$ 。所以势流问题的求解无须联立解基本方程组, 可以大大简化。

## 二、平面势流

和流速势相似, 可以定义一个和流速有关的标量函数  $\psi$ , 称为流函数。

在平面流动中, 流线方程为

$$u dy - v dx = 0 \quad (1.55)$$

此式能够积分的必要和充分条件是

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

这正是不可压缩流体平面流动的连续方程。所以对于这类流动, 式(1.55)可以积分, 令

$$d\psi = (u dy - v dx) = \psi(x, y) \quad (1.56)$$

$\psi(x, y)$  即为流函数。这就证明不可压缩流体的平面流动存在流函数。

由 
$$d\psi = u dy - v dx \quad (1.57)$$

及 
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

可知 
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (1.58)$$

以流线方程(1.55)代入式(1.57)得

$$d = 0 = C \quad (1.59)$$

所以等流函数线就是流线。同时不难证明两条相邻流线的流函数值之差等于两流线之间的单宽流量

$$q = \int_1^2 d = \psi_2 - \psi_1 \quad (1.60)$$

将式(1.58)代入  $z = 0$ , 即  $\frac{v}{x} - \frac{u}{y} = 0$  可得

$$\frac{v^2}{x^2} + \frac{u^2}{y^2} = 0 \quad (1.61)$$

故在平面势流中, 流函数也满足拉普拉斯方程。

比较式(1.53)和式(1.58)可得

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.62)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

这是联系流速势和流函数的一对重要关系式, 称为柯西-黎曼条件。

在平面势流中绘出  $\phi$  值相等的等势线和  $\psi$  值相等的等流函数线(即流线), 这两族曲线互相正交组成一个网, 称为流网, 如图 1.5 所示。在一定边界条件下的平面势流, 如能将流网绘出, 则流动就完全确定。

对于空间流动, 有些简单情况如轴对称流动, 也存在流函数, 如属势流则也有流速势。

环境问题中, 有不少流动可按势流分析, 较常见的例子是流入进水口或吸气口前的流动。

势流问题既然归结为解拉普拉斯方程, 则一切解这个二阶线性偏微分方程的方法都可应用。求解的方法很多, 对势流问题应用较多的有下列几种途径: 1. 势流叠加法; 2. 复变函数法; 3. 数



值解法; 4. 试绘流网法; 5. 电比拟实验法等, 可根据需要参考有关势流的书籍。

图 1.5 流网

## 1.8 有涡流动, 涡量方程

### 一、涡线、涡量和速度环量

流体运动中流体微团有转动, 其角转速  $\omega$  的称为有涡流动(或有旋流)。角转速也是个矢量, 可以用描述流速相类似的方法来描述。流场中各点角转速的方向可用涡线表示, 涡线上各点在同一瞬时的角转速矢量与涡线在该点相切(图 1.6a), 通过微小断面  $dA$  周线的一组涡线构成涡管(图 1.6b)。涡管内的流体称为元涡, 定义元涡的涡通量为  $\Gamma$   $dA$ ,

$$\Gamma = \text{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = 2 \boldsymbol{\omega} \quad (1.63)$$

称为涡量(或旋度)。

和旋涡运动有关的另一个重要概念是速度环量, 它的定义是

流场中流速沿一个封闭曲线的积分,以  $\Gamma$  表示(如图 1.7),其表达式为

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L v_L dL = \oint_L (u dx + v dy + w dz) \quad (1.64)$$

式中  $v_L$  为曲线的切线方向分速,习惯上以逆时针绕行方向为正,顺时针方向为负。

图 1.6 涡线及涡管

图 1.7 速度环量

速度环量与涡通量可证明有下列关系

$$\Gamma = \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \int_A \zeta \mathbf{n} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.65)$$

$\mathbf{n}$  为曲面法向单位矢量。就是说,沿封闭曲线  $L$  的速度环量等于穿过以该曲线为周界的任意曲面的涡通量。这个关系称为斯托克斯定理。根据这个定理可以通过分析速度环量来研究旋涡运动。如果封闭曲线所包围的是有势流动区,因  $\zeta = 0$ ,则沿该曲线的速度环量  $\Gamma = 0$ 。

理想流体在有势的质量力作用下,沿由相同的流体质点组成的封闭曲线的速度环量不随时间变化,即

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (1.66)$$

称为开尔文定理。再由式(1.65)知涡量也是守恒的。则在上述条件下,原来流动是无涡的将一直保持为有势流动。

## 二、涡量方程

环境中较简单的旋涡运动有水中的立轴旋涡和大气中的龙卷风等。这些单个或几个孤立的旋涡较易分析(见一般流体力学书)。复杂的有涡流动原则上可从粘性流体运动基本方程组求解,这些方程是以流速作为基本变量,用流速分布来描述运动的。现介绍另一个以涡量作为基本变量,用涡量分布来描述有涡流动的方程,称为涡量方程,限于讨论不可压缩流体的情况。

涡量的连续方程可推导如下:取涡量的散度,并以涡量的定义

$$\begin{aligned} \zeta_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ \zeta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \zeta_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.67)$$

代入得

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} \quad \rho &= \frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} + \frac{-z}{z} \\ &= \frac{\frac{2w}{x}}{y} - \frac{\frac{2v}{x}}{z} + \frac{\frac{2u}{y}}{z} - \frac{\frac{2w}{y}}{x} + \frac{\frac{2v}{z}}{x} - \frac{\frac{2u}{z}}{y} = 0 \end{aligned}$$

即 
$$\frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} + \frac{-z}{z} = 0 \quad (1.68)$$

故对于不可压缩流体, 涡量也有和流速相同形式的连续方程。

涡量的运动方程可从纳维-斯托克斯方程推导如下: 不考虑体积力的不可压缩流体的纳维-斯托克斯方程沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的分式为

$$\begin{aligned} \frac{u}{t} + u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y} + w \frac{u}{z} &= - \frac{1}{x} \frac{p}{x} + \frac{\frac{2u}{x^2}}{x^2} + \frac{\frac{2u}{y^2}}{y^2} + \frac{\frac{2u}{z^2}}{z^2} \\ \frac{v}{t} + u \frac{v}{x} + v \frac{v}{y} + w \frac{v}{z} &= - \frac{1}{y} \frac{p}{y} + \frac{\frac{2v}{x^2}}{x^2} + \frac{\frac{2v}{y^2}}{y^2} + \frac{\frac{2v}{z^2}}{z^2} \\ \frac{w}{t} + u \frac{w}{x} + v \frac{w}{y} + w \frac{w}{z} &= - \frac{1}{z} \frac{p}{z} + \frac{\frac{2w}{x^2}}{x^2} + \frac{\frac{2w}{y^2}}{y^2} + \frac{\frac{2w}{z^2}}{z^2} \end{aligned}$$

对上面第(3)式取  $y$  的偏导, 对第(2)式取  $z$  的偏导后, 从前式减去后式即消去压强项, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\frac{2w}{t}}{y} + \frac{u}{y} \frac{w}{x} + \frac{v}{y} \frac{w}{y} + \frac{w}{y} \frac{w}{z} - \frac{\frac{2v}{t}}{z} \\ - \frac{u}{z} \frac{v}{x} - \frac{v}{z} \frac{v}{y} - \frac{w}{z} \frac{v}{z} \\ = \frac{\frac{3w}{y}}{x^2} + \frac{\frac{3w}{y}}{y^3} + \frac{\frac{3w}{y}}{z^2} - \frac{\frac{3v}{z}}{x^2} - \frac{\frac{3v}{z}}{y^2} - \frac{\frac{3v}{z}}{z^3} \end{aligned}$$

将上式整理并以式(1.67)代入, 可得

$$\begin{aligned} \frac{-x}{t} + u \frac{-x}{x} + v \frac{-x}{y} + w \frac{-x}{z} \\ = \frac{u}{x} \frac{-x}{x} + \frac{v}{y} \frac{-x}{y} + \frac{w}{z} \frac{-x}{z} + \frac{\frac{2}{x^2}}{x^2} + \frac{\frac{2}{y^2}}{y^2} + \frac{\frac{2}{z^2}}{z^2} \quad (1.69a) \end{aligned}$$

同理可得另外两个方程:

$$\frac{-y}{t} + u \frac{-y}{x} + v \frac{-y}{y} + w \frac{-y}{z}$$

$$= x \frac{v}{x} + y \frac{v}{y} + z \frac{v}{z} + \frac{v^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{v^2}{z^2} \quad (1.69b)$$

$$\frac{dz}{dt} + u \frac{z}{x} + v \frac{z}{y} + w \frac{y}{z}$$

$$= x \frac{w}{x} + y \frac{w}{y} + z \frac{w}{z} + \frac{w^2}{x^2} + \frac{w^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} \quad (1.69c)$$

或写成矢量形式:

$$\frac{d\omega}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = (\nabla \times \omega) \cdot \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \omega \quad (1.69)$$

这就是以涡量表示的不可压缩粘性流体的运动方程。方程中左边是涡量的总变率,包括当地变率和迁移变率;右边第二项是粘性对涡量的耗散,与N-S方程中的 $\nu \nabla^2 v$ 项的意义相应;右边第一项是涡量方程中出现的新项,代表由于涡量与流体变形的相互作用而引起的涡量变化。涡量方程的一个特点是不出现压强项,可直接解出涡量场。但方程的求解也是不容易的。

## 1.9 边界层概念与边界层方程

### 一、低雷诺数与高雷诺数的流动

在介绍边界层理论之前,先讨论低雷诺数流动与高雷诺数流动的差别。为方便计,取不可压缩流体定常流动且不考虑质量力作用的粘性流体运动方程

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.70)$$

将它无量纲化,采用特征量为L、U,各变量的相应无量纲量为

$$x^\circ = \frac{x}{L} \quad y^\circ = \frac{y}{L} \quad u^\circ = \frac{u}{U}$$

$$v^\circ = \frac{v}{U} \quad p^\circ = \frac{p}{\rho U^2}$$

代入式(1.70)得无量纲方程为

$$(\nu \nabla^2 \mathbf{v})^\circ = - (\nabla p)^\circ + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{v})^\circ \quad (1.71)$$

雷诺数  $Re = \frac{UL}{\nu}$ , 式中左边为惯性力项, 右边末项为粘性力项。

当  $Re$  很小 ( $n=1$ ) 时, 粘性力项远大于惯性力项, 后者可以忽略, 式(1.71)成为

$$- (\nabla p)^\circ + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{v})^\circ = 0 \quad (1.72)$$

恢复为有量纲式得

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.73)$$

即压力差与粘性力平衡, 这类流动称为蠕动。在这类流动中粘性力的影响可到相当大的距离。

当  $Re$  很大时, 粘性力项远小于惯性力项, 忽略前者时式(1.71)成为

$$(\nu \nabla^2 \mathbf{v})^\circ = - (\nabla p)^\circ \quad (1.74)$$

恢复为有量纲式即得欧拉方程

$$(\nu \nabla^2 \mathbf{v}) = - \frac{1}{Re} \nabla p \quad (1.75)$$

于是成为理想流体的运动方程。这意味着在高雷诺数的条件下, 实际流体的运动可近似按理想流体来分析。

## 二、边界层概念

在高雷诺数情况下, 从运动方程看可近似按理想流体分析。这样一来, 在固体边界上可以有  $v=0$ , 即可以有滑动。但在实际情况, 无论  $Re$  多么大, 实验观测证实, 物面上无滑动的边界条件  $v=0$  是始终存在的, 所以两者是有矛盾的。

1904年普兰特提出边界层理论解决了这个矛盾。边界层理论的主要论点是: 高雷诺数的流动可以分为两个性质不同的区域, 在固体壁面附近的一个薄层中, 由于流速梯度很大, 粘性作用必须

考虑, 这个薄层称为边界层。在边界层以外的区域, 则可以忽略粘性作用, 而按理想流体处理。由于粘性作用只限制在一个薄层中, 粘性流体的运动方程可以大为简化。边界层外按势流分析, 从而使势流理论应用于实际流体的领域也得到扩大。

以均匀流平行流过平板的情况来说明边界层的发展过程如图 1.8 所示。起始为层流边界层, 随着距离增大, 边界层增厚, 至一定距离后转变为紊流边界层, 转捩约发生在  $Re_x = \frac{u_\infty X}{\nu} = 5 \times 10^5 \sim 3 \times 10^6$  之间。在紊流边界层内, 贴壁面处还存在一个很薄的粘性作用很大的粘性底层。

图 1.8 边界层

边界层与势流区理论上无明显分界, 通常以  $u = 0.99u_e$  处作为边界层的外缘,  $u_e$  是势流的流速(在平板上均匀来流,  $u_e = U$ )。从边界层外缘至物面的垂直距离定为边界层的名义厚度, 以  $\delta$  表示。从边界层内惯性力和粘性力具有相同的量级可估计  $\delta$  的量级如下: 惯性力的量级为  $\frac{U^2}{L}$ , 粘性力的量级为  $\mu \frac{U}{\delta^2} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}$ , 则  $\mu U / \delta^2 \sim U^2 / L$ , 由此可得

$$\frac{\mu}{U \delta} = \frac{L}{Re}$$

或 
$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\text{Re}} \quad (1.76)$$

比例系数可通过理论或实验确定。可以看到,  $\text{Re}$  愈大 愈薄,  $\delta \propto L^{-1/2}$ 。因为名义厚度不易准确定出, 在分析中又引出了位移厚度、动量损失厚度和能量损失厚度几个边界层厚度的概念, 可参阅流体力学书。

### 三、边界层的微分方程

现从不可压缩粘性流体定常平面流动的基本方程出发, 不考虑质量力的作用时方程组为

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.77)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.79)$$

根据边界层内流动具有  $\delta \ll L$  的特点, 可知流动尺度上  $y \sim \delta$ , 流速分量上  $v \ll u$ , 由此逐个分析比较方程中各项的量级, 忽略量级小的项后, 可将方程组简化为

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.79)$$

这就是不可压缩定常平面流动的边界层方程组。从式(1.81)可见边界层内法向压强基本不变, 它等于边界层外在边界上的压强  $p_e$ , 这样就可以应用势流区的计算结果, 边界层中的压强成为已知量, 方程(1.80)、(1.79)就只有  $u$ 、 $v$  两个未知量了。对于非定常流



动, 只需在方程(1.80)左边增加  $\frac{u}{t}$  项即可。

对于轴对称流动, 应用柱坐标系, 不可压缩流体定常流动的边界层方程组为

$$u \frac{u}{x} + v_r \frac{u}{r} = - \frac{1}{x} \frac{p}{x} + \frac{1}{r} \frac{p}{r} - r \frac{u}{r} \quad (1.82)$$

$$\frac{p}{r} = 0 \quad (1.83)$$

$$\frac{u}{x} + \frac{1}{r} \frac{(rv_r)}{r} = 0 \quad (1.84)$$

式中  $x$  为轴向,  $r$  为径向。

#### 四、边界层的动量积分方程

边界层方程与纳维-斯托克斯方程相比虽已大为简化, 但仍是非线性偏微分方程, 精确求解仍然较困难。1921年卡门提出边界层的动量积分方程, 使求近似解得到很大的方便。

图 1.9

仍以不可压缩流体平面流动的边界层讨论。取长度为  $dx$  的微段作为控制体如图 1.9 中 ABCD 所示。应用动量定律分析在  $dt$  时间内沿  $x$  方向动量的变化和作用力的关系, 略去推导可得

$$\frac{1}{x} \int_0^{\delta} u^2 dy - u_e \frac{1}{x} \int_0^{\delta} u dy = - \frac{dp}{dx} - \tau_0 \quad (1.85)$$

此即卡门边界层积分方程, 式中  $\tau_0$  为单位壁面摩擦阻力。此式对

并无限制,故对层流边界层和紊流边界层都可应用。式中  $u_e$  及  $dp/dx$  可由边界层外势流求得,尚有  $u$ 、 $v$  和  $\rho$  三个未知量,还需要补充两个关系式才能求解,一般是采用  $u = u(y)$  和  $\rho = \rho(y)$  的关系式。

边界层理论在环境问题中有广泛的应用,不但大气边界层。一般管道、明槽中有固体边界的流动要用到,而且以后会看到在无固体边界的自由射流问题,也可应用边界层方程作近似分析。

### 1.10 小密度差流动,布辛涅斯克近似

对考虑密度变化的可压缩粘性流体运动,作严格分析是复杂而困难的。但在密度差小,如许多环境问题中的情况,通常可采用布辛涅斯克近似(Boussinesq's approximation)。它的要点是:密度变化的作用只在重力项上保留,对其他的影响都忽略不计。因此,在运动方程中,惯性力项和粘性力项的密度都认为是常数,只在质量力项计算重力或浮力时要考虑密度的变化。这样,当质量力为重力时,纳维-斯托克斯方程为

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{v}{t} + (v \cdot \nabla) v = - \nabla p + g + \mu \nabla^2 v \quad (1.86)$$

若  $p$  和  $\rho$  都以静平衡时的值  $p_0$  和  $\rho_0$  为参考状态,令  $p = p_0 + p'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , 代入式(1.86),并考虑到静止时有  $\nabla p_0 = \rho_0 g$  的关系,可得

$$\frac{Dv}{Dt} = - \nabla (p') + g + \mu \nabla^2 v \quad (1.87)$$

或 
$$1 + \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{Dv}{Dt} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla (p') + g + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 v \quad (1.88)$$

式中左边惯性力项和右边第二项重力项出现  $\rho'$ 。在密度差小的情况,  $\rho' \ll \rho_0$ , 故在惯性力项中忽略  $\rho'$  影响不大,而在重力项是

主要的,其他各项也都可按密度是常数来考虑,这就是布辛涅斯克近似的要点。可见当以  $g^* = \frac{1}{\rho_0}g$  代替  $g$ ,  $\rho$  代替  $\rho_0$  时,纳维-斯托克斯方程(1.86)就成为布辛涅斯克近似方程

$$\frac{Dv}{Dt} = - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} (p) + g^* + \mu \text{div}^2 v \quad (1.89)$$

式中  $g^* = \frac{1}{\rho_0}g$  称为折减重力加速度。

在布辛涅斯克近似条件下,连续方程的形式没有变化,仍和等密度情况相同,即

$$\text{div} \rho v = 0 \quad (1.90)$$

采用了布辛涅斯克近似后,运动方程大为简化而较易求解。有关布氏近似的详细讨论可参考文献[4]。

## 1.11 旋转流体流动,科里奥利力效应

旋转流体流动指在旋转系统中的流体相对于该旋转系统的运动,尺度较小的如旋转机械中的流体运动,尺度较大的如考虑地转影响的地球上流体的运动。以前各节讨论的流体运动都是按照牛顿定律  $F = ma$  分析,即对于惯性坐标系进行的。如相对于一个固定在旋转系统上的坐标系来说,后者为非惯性坐标系,应用牛顿定律时上述关系式就要进行修正。

由理论力学得知,质点对于一个定坐标系的绝对运动等于该质点对另一个动坐标系的相对运动与该动坐标系对于定坐标系的牵连运动之和。当牵连运动是绕定轴转动时,可以推导出质点的绝对加速度与相对加速度的关系为

$$a = a_R + a_e + a_k \quad (1.91)$$

式中  $a$  为绝对加速度;  $a_R$  为相对加速度;  $a_e$  为牵连加速度;  $a_k$  为

科里奥利加速度(Coriolis acceleration)。

$$a_e = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.92)$$

$$a_k = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R \quad (1.93)$$

为系统绕定轴旋转的角速度,  $r$  为质点离转轴上原点的矢径。 $a_R$  是仅在动坐标系中作相对运动的加速度;  $a_e$  是仅由于牵连运动(转动)产生的加速度;  $a_k$  则可理解为相对运动与牵连运动相互作用的结果,  $a_k$  的方向和相对速度  $v_R$  正交, 其指向如图 1.10 所示, 其模等于  $2 v_R \sin \theta$ ,  $\theta$  是  $v_R$  与转轴的夹角。

图 1.10 科里奥利加速度

现设流体的边界以等角速度绕定轴旋转, 在边界上(内)的流体在旋转足够长的时间以后也将整体如同刚体一样以同一角速度旋转。在这个旋转流体中由于各种原因产生某种运动时, 研究相对于这个旋转系统的流动就要用到上述加速度的关系式。此时流体微团的绝对加速度和相对加速度分别表示为  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}_I$  及  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}_R$ , 将 (1.91)、(1.92)、(1.93) 各式代入有

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}_I = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}_R + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_R \quad (1.94)$$

对于  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}_I$  仍可用前面惯性坐标系的运动方程, 如考虑质量力为重力时的纳维-斯托克斯方程

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}_I = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.95)$$

---

各式的详细推导在较完全的理论力学书中均可查到。

并将  $\frac{Dv}{Dt}_R$  展开

$$\frac{Dv}{Dt}_R = \frac{v_R}{t} + (v \cdot \nabla)v_R$$

代入式(1.94), 便得旋转流体相对运动的微分方程(略去下标 'R'):

$$\begin{aligned} \frac{v}{t} + v \cdot \nabla v = & - \frac{1}{\rho} \nabla p + g - \omega \times (\omega \times r) \\ & - 2 \omega \times v + \frac{1}{2} \nabla \omega^2 r^2 \end{aligned} \quad (1.96)$$

和式(1.95)比较, 右边多了两项:  $-\omega \times (\omega \times r)$  称为离心惯性力项;  $-2\omega \times v$  称为科里奥利惯性力项, 简称科氏力项(均对单位质量流体来说)。其中前一项较简单, 因可表示为一个标量的梯度

$$\omega \times (\omega \times r) = - \nabla \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad (1.97)$$

而可和压强项合并考虑, 即以  $\nabla p - \frac{1}{2} \nabla \omega^2 r^2$  代替  $\nabla p$  便和无旋转一样处理。科氏力效应则成为旋转流体流动的主要特征。

衡量科氏力效应相对程度的有两个无量纲参数: 罗斯比数(Rossby number)  $Ro$  及埃克曼数(Ekman number)  $Ek$ ,

$$Ro = \frac{U}{L} \text{ 为惯性力与科氏力量级之比;}$$

$$Ek = \frac{\nu}{L^2} \text{ 为粘性力与科氏力量级之比。}$$

式中  $U$  为特征流速;  $L$  为特征长度。如果  $Ro$  及  $Ek$  都很小时, 作用于流体微团上的力主要是重力、压力和科氏力, 这种流动称为准地转流动。

讨论旋转流体的特性以及科氏力对大气环流和海洋环流的作用等已超出本书的范围。但要指出对于较大的河流、湖泊和海湾等水域的流动问题有时也要考虑科氏力的作用。

## 第二章 紊流基础(一)

### ——紊动的发生与紊流的描述

雷诺在 1883 年通过圆管中水流实验发现存在层流和紊流(湍流)两种流动形态。在层流中各层流体互不掺混,质点作规则的沿光滑路线的运动;在紊流中则各层流体互相掺混,质点运动很不规则。从观测可以看到,自然界中和工程中的流动大多数是紊流,层流情况较少。前章讨论基本方程时没有涉及紊流特性的影响。尽管紊流问题至为复杂,至今理论上还远未完全解决,但在实际工作中经常遇到,对环境中污染物扩散迁移等问题更是关系密切,因此有必要对紊流的性质及目前的理论作初步介绍。

什么是紊流(turbulent flow)?目前尚没有一个统一公认的明确定义。较好的办法是从紊流的特性去理解它。而讨论紊流的特性,先要从紊动(turbulence)的发生开始,然后看充分发展的紊流具有那些重要特性,进而介绍当前采用的描述紊流的概念和方法。

#### 2.1 流动的稳定性

当层流的雷诺数增大至一定值以后会转变为紊流,这是已为实验所明确的事实。这种流态转变的条件,一个是要有外来的扰动,如边界形状的改变,粗糙的影响和外界的振动等,一般情况扰动总是存在的;另一个是流动中粘性力已不足以抑制惯性力的作

用。层流对扰动的抑制能力称为流动的稳定性。当这种抑制能力不足以遏阻各方面产生的扰动的发展时,流动失去稳定,扰动发展扩大,最后转变为紊流。将流动开始失去稳定的雷诺数定义为临界雷诺数,以  $Re_{cr}$  表示。流动的边界条件不同,采用的特征量不同,临界雷诺数的值也就不同。

临界雷诺数可以由实验确定,也有不少学者从理论上去推求。这种从层流的失稳研究紊流发生的理论称为流动稳定性理论,从雷诺开始至今已发展成为紊流理论的一个分支。其中较经典的是小扰动理论。这个理论分析稳定性的方法是:在层流中加一个微小的扰动,分析这个扰动的衰减或发展的条件。如果扰动衰减,流动是稳定的;如果扰动发展,则是不稳定的。由于数学上的困难,小扰动理论所得分析稳定性的方程迄今只有极少数几个流动得到解答,如托尔曼(Tollmien, W. 1929, 1931)对平板边界层流动和林家翘(1945, 1946)对平行平板间流动等。

对平板边界层流动的稳定性分析得到的结果如图 2.1 所示。

图 2.1 平板边界层流动的稳定性

---

较详细的介绍和得到的分析稳定性的方程(Orr-Sommerfeld 方程)可参考文献[3]。

图中  $\delta$  为边界层厚度,  $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ , 为扰动波长。曲线包围的区域是流动不稳定的范围, 区域边缘的最小雷诺数即为临界雷诺数  $Re_{cr}$ 。但需指出, 理论得到的临界雷诺数是指流动开始失稳的条件, 而从流动不稳定, 扰动开始发展至流态转变为紊流要有一个过程, 由实验观测得到的临界雷诺数是按流态转变来确定的, 故大于上述理论值。所以可将理论值称为稳定临界雷诺数, 实验值称为流态临界雷诺数, 以示区别。按托尔曼的计算, 平板边界层稳定临界雷诺数  $Re_{cr} = \frac{U}{\nu} \delta_1 = 420$ 。后来佐丁孙 (Jordinson, 1970) 的计算值为  $Re_{cr} = 520$ 。 $\delta_1$  是边界层的位移厚度, 相应的  $\delta_1 = 0.36$ 。由此可得最小的不稳定扰动波长  $\lambda_{min} = 17.5 \delta_1 = 6$ 。而由实验得到相应的流态临界雷诺数  $Re_{cr} = \frac{U}{\nu} \delta_1 = 950$ , 大于稳定临界雷诺数值。

上述稳定理论只考虑雷诺数作为影响流动稳定的唯一因素, 实际流动中除了雷诺数是主要因素以外, 还有其他影响稳定性的因素, 这方面的研究不少, 现取其中常见的几个简述如下:

(1) 来流紊动的影响 来流的紊动可以紊动强度  $I =$

$$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{U}}$$

来衡量,  $u, v, w$  是三个方向分速的脉动

值(详见 2.3 节)。实验说明随着来流紊动强度的降低, 临界雷诺数增大, 但当  $I < 0.08\%$ , 临界雷诺数即保持定值。还有实验得出, 随着来流紊动强度的提高, 流态临界雷诺数和稳定临界雷诺数的差值减小, 当  $I$  达到  $2\% \sim 3\%$  时两个临界雷诺数的差别即消失。

(2) 压强梯度的影响 对于沿程压强梯度不等于零的流动, 例如曲面上的边界层, 压强梯度对稳定性的影响是通过流速分布

---

位移厚度的定义是  $\delta_1 = \int_0^{\delta_1} (1 - \frac{u}{u_e}) dy$ , 即势流区的流线向外推移的距离。



$u(y)$  表现出来的。当不考虑质量力时, 在边界层外有  $\frac{dp}{dx} = -u \frac{du}{dx}$ , 而在边界层底有  $\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} \Big|_{y=0}$ 。因此在加速区  $\frac{du}{dx} > 0$ ,  $\frac{dp}{dx} < 0$ , 从而  $\frac{d^2u}{dy^2} < 0$ ,  $\frac{du}{dy}$  应递减, 流动趋于稳定。反之在减速区,  $\frac{du}{dx} < 0$ ,  $\frac{dp}{dx} > 0$ , 因此  $\frac{du}{dy}$  递增而不利于稳定。所以作为近似估计, 沿程中流速最大即压强最小的位置可作为不稳定点, 而流态过渡点即紧随在它的下游。

(3) 壁面粗糙度的影响 壁面粗糙增加流动的扰动, 因而在一般情况下, 粗糙降低了流动的稳定性, 使临界雷诺数减小。但如粗糙度较小, 由它引起的扰动小于其他扰动时, 对流动稳定性将不发生影响。对于二维单个粗糙, 实验求得不影响稳定的最大粗糙度  $k_{max}$  可表示为  $\frac{v^* k_{max}}{\nu} = 7$ , 式中  $v^* = \frac{\tau_{ok}}{\rho}$ ,  $\tau_{ok}$  为粗糙突起高度处的壁面切应力。对于更普遍的布满壁面的粗糙的影响研究得尚不多。

此外尚有影响稳定性的其他因素如质量力、热量交换和压缩性等, 可参考有关文献[3]。

在流动稳定性的研究中, 还发现在某些流动中层流会出现二次失稳现象, 小扰动理论不能解决。实验与小扰动理论结果的不一致, 使得有理由认为未扰层流对小扰动虽是稳定的, 对有限扰动可能是不稳定的。因此要全面解决问题, 必须考虑有限扰动, 而开展非线性理论研究。另外, 除二维扰动外还提出三维扰动的问题。

## 2.2 紊动的发生过程

关于紊动发生与发展的过程目前还没有一个很系统的分析描述, 但这个问题对紊流性质的认识至为重要。现只从物理现象着手介绍。

## 一、剪切层

总的说来,紊动都是通过剪切作用产生的,而强大的剪切作用都发生在剪切层(shear layer),因此剪切层是紊动发生的主要场所。所谓剪切层是指在流线的法线方向具有流速梯度的流层。许多流动中流速梯度都集中在较薄的流层内,故剪切层都具有细长的形状。管道和明槽进口段的边界层;流速不相等的两平行流动间的过渡混合层;淹没射流与周围流体间的流层;绕流物体的边界层和尾流等都是剪切层的实例(见图 2.2)。

图 2.2 剪切层和紊流分类

对于无粘性的理想流体,当内部有上下流速不等的间断面时,只要有某一扰动使间断面出现波状,按伯努利方程分析,波面两侧

产生压强差,结果会使波面逐渐发展形成涡旋,如图 2.3 所示。对于有粘性的实际流体,在剪切层中流层之间存在速度差,所以也会因扰动而形成涡旋,特别在速度分布图上有拐点的情况就更不稳定而易生涡旋。涡旋再发展而产生紊动。下面分壁面紊流和自由紊流两种情况讨论。

图 2.3 间断面与涡旋的形成

## 二、壁面紊流的发生与猝发现象

壁面紊流是指靠近固体边壁面上的紊流,其流速梯度是由固体边壁上无滑动的条件所引起的。

从本世纪 60 年代克莱因(Kline, S. J. 1967) 等用氢泡技术显示流动开始,人们发现壁面紊动的发生最初表现为一种猝发现象(Bursting)。猝发的过程大致如下:在很靠近边壁的粘性底层中,平面上具有顺流向的低速带和高速带相间的带状结构(图 2.4)。低速带的分布是不均匀的,其形状也不规则,两相邻低速带的平均间距设为  $\lambda$ ,其无量纲距  $y^+ = \frac{y v_*}{\nu}$  约为 100,  $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$  为摩阻流速,

$\tau_0$  为壁面单位阻力。低速带出现的无量纲高度  $y^+ = \frac{y v_*}{\nu}$  约在 0—10 之间。低速带随时均流动向下游移动时,其下游头部缓慢上举,

### 图 2.4 粘性底层中的带状结构

(北京航空航天大学流体力学实验室提供)

增大与壁面的距离,常形成横向涡旋如图 2.5 所示。涡旋上下产生压差,使涡旋顶着低速带上升,倾角约为  $2^\circ \sim 20^\circ$ 。涡旋本身则变形成为马蹄形涡,头部上举后进入流速较大的流层,马蹄形涡发生拉伸变形(图 2.6)。涡旋拉伸作用的结果使简单的涡旋转变发展,形成错综复杂的涡量场。

图 2.5 低速带的上举

另一方面,在低速带上举过程中,观察到一股高速流体从上面  $y^+ = 20 \sim 200$  的流区向下游俯冲,在高速流体与低速流体之间形成一个强大的剪切层,瞬时流速分布曲线上出现拐点,这是流动不稳定的条件。一般在  $y^+ = 10 \sim 30$  的流区还看到低速流体突然向上层高速流体“喷射”,在和高速流体掺混过程中产生大量剧烈的紊动(图 2.7),同时高速流体乘机俯冲而入,俯冲角度约为  $5^\circ \sim 15^\circ$ ;这个过程可称为“清扫”。清扫过后流速分布恢复正常,拐点消失。低速流体的喷射和高速流体的

清扫是猝发现象的两个主要组成部分。清扫过后, 又是新的低速带的出现而重复以上各个阶段。

图 2.6 马蹄形涡旋发展过程<sup>[6]</sup>

图 2.7 猝发现象<sup>[5]</sup>

总的说来, 猝发现象是一种循环性和间歇性的现象, 发生的地点和时间又都具有随机性质。以上所述还只是在实验室内一个平面上有限范围观测结果的解释, 至今可说尚处于不断探索的阶段。

但从得到的资料表明,在猝发过程中流速分布和涡量分布都发生剧烈的变动,绝大部分紊动能量的产生都发生在猝发期间,所以猝发现象是时均流动能量转化为紊动能量的一种主要方式。

### 三、自由紊流的发生与相干结构

自由紊流是指远离固体壁面,紊动发展不受边壁限制的紊流,其剪切层的流速梯度是由间断面引起的。

自由紊流的发生是从具有流速差的两层流体的间断面开始的。间断面是不稳定的,一有扰动便发展形成涡旋,涡旋的形态和性质受各种因素的影响。

近 20 多年来,由于流动显示和量测技术的进步,人们发现在剪切紊流中存在较有次序的大尺度结构,主要表现为涡旋的形式,称为相干结构(coherent structures),或紊流的拟序结构。对相干结构目前尚无很确定的定义,有人提出,这种结构是剪切紊流中具有有序的涡量且其尺度大小具有剪切流本身宽度的量级的一些紊动流体。在自由紊流中一定的雷诺数范围内曾观察到相当确定的相干结构的形式。不同类型的剪切流是否都具有相同的相干结构的模式?对此尚无定论。下面对几种典型的自由剪切紊流中出现的相干结构作简单介绍。

(1) 二维差流混合层 这是最简单的一种自由剪切紊流,如图 2.8(a)。对它的相干结构研究也较多。图 2.8(b)为用流动显示方法得到的流速不等的两股气体的混合层中的相干结构(Roshko, A. 1967),它是一行明显的涡旋。所有涡旋向前移动的速度近于相同,约等于  $U_1$  和  $U_2$  的平均值。涡旋的尺寸和间距沿程增大,经历一段距离后涡旋即被吞并而消亡,每个涡旋都有它的生存时间或距离。从观测得知,涡旋尺寸和间距的增大是由涡对的合并而实现的,在这个过程中相邻两个涡旋彼此围绕作反向旋转,相互作用,最后合并成为一个较大的涡旋。这种作用是混合层增厚

的一个主要因素,所以涡对合并被看作是这种流动的一个重要机理。

图 2.8 二维混合层的相干结构  
(根据 Roshko, A. 1967)

与紊动混合层增厚发展有关的一个重要现象是卷吸(或挟掺)(entrainment),即把周围非紊动的流体挟入到紊动区域之内,或者看作是紊动区域扩展到周围流动中去。这个挟掺过程也可看作是大尺度涡旋相互作用时的吞没作用,周围非紊动的流体在涡旋之间被挟入,随着涡旋的合并而被包进剪切层内。同时由于小尺度紊动作用,发生内部混合而成为紊流。在混合层的边界上也许可能还有一些小尺度紊动的扩散作用,但整个混合层的总体的和时均的特征则应主要决定于大尺度涡旋的作用。

(2) 轴对称紊动射流 当固体边界距离较远时仍属于自由紊流,但较平面混合层稍复杂些。对这种圆形断面射流的相干结构研究的工作也不少,按侯赛因(Hussion, A. K. M. F. 1980)的研究,在射流的近区,其相干结构示意图如图 2.9。他用相干涡量  $\rho$  (即涡量的有序部分)的分布来表示流动的结构,以测得资料在通过轴线

---

对 entrainment 现象,目前国内尚没有一个统一的译名。

的剖面上绘出  $\rho$  的等值线, 由此可将流动分为 4 个区, 图中各区绘出的是等值线的外轮廓, 向内涡量增大。在 区有两个峰值, 涡量最大, 其他区各有一个峰值。各区之间有联带, 联带的涡量远小于结构的峰值涡量。在射流的远区, 至  $\frac{x}{D} > 40$  处仍能从资料的分析说明有大尺度结构的存在, 其长度约相当于当地  $y_{\frac{1}{2}}$

即  $u = \frac{u_m}{2}$  处的  $y$  值的 6 倍, 在这个区域一般认为已达到自相似的范围。

图 2.9 紊动射流的相干结构(根据 Hussion. A. K. M. F. 1980)

(3) 尾流 圆柱绕流后面发生的卡门涡列是人们熟悉的有序大尺度结构, 这是在雷诺数不大时发生的。近年研究认为在较高的雷诺数时仍有相干结构存在, 且保持至圆柱下游相当长的距离, 达到圆柱直径的 300—500 倍, 但不如近区的规则。按格朗特(Grant, H. L)和汤森(Townsend, A. A.)等研究, 尾流的大尺度结构会出现两种型式: 一种型式是在尾流的每半部中的涡旋包含两个平行的涡管, 反向旋转构成涡对如图 2.10(a)所示, 因沿管和绕管都有流动而形成螺旋流。涡管可能不是直的, 但形状尚未得知, 因在尾流两侧同时出现, 故总体绘成图示形状。这种涡旋的发生可能是由



于时均剪切力作用于起始的各向同性脉动的结果。另一种大尺度涡旋是沿流向在尾流中近似等距排列,其运动包含一种类似射流形式的流动,从尾流中部向外喷射,在紊动流体与非紊动流体的界面上产生隆起现象,由外转回尾流中部的流动则比较分散,见图 2.10(b)。这种涡旋的产生可能是由于时均流速分布剖面的局部不稳定所致,它的出现是间歇的和不规则的。

图 2.10 尾流的相干结构<sup>[6]</sup>

(a) 尾流中的双滚涡旋; (b) 尾流中的“射流型”涡流

对于壁面紊流,由于固体边壁的影响,其结构比自由紊流复杂,汤森等对相干结构的存在早有觉察,及至猝发现象被揭示后就更为明确,其产生过程和马蹄形涡的发展等已见前述。尽管猝发现象与尺度为边界层厚度量级的三维结构的迁移可以联系起来,但还没有得到一个和自由紊流那样较为明晰的相干结构的图型。

紊流发生过程中出现大尺度结构,以后如何发展演变的问题还在不断研究中,按后面将要讨论的涡旋拉伸理论,总的趋势是尺度由大变小,最后形成大小交错的复杂的涡旋结构。也有认为在某些情况下,紊动发生时一开始即猝发许多小尺度的紊动。在高雷诺数下自由紊流中是否还存在相干结构还有不同意见。

从空间角度说,紊动的发生最初是局部性的,局部性的紊动发

生以后,在原层流中形成一个紊动斑(turbulent spot),图 2.11 为平板边界层中人工产生的紊动斑,它的前端的速度大于尾端的速度,于是逐渐扩大。紊动斑通过流场中空间某点时,该点流速即出现脉动,紊动斑经过后又恢复为层流流速,因此呈现间歇性(intermittency)。在圆管中层流转变为紊流时,局部紊动常沿径向

图 2.11 紊动斑<sup>[6]</sup>

发展,先充满全断面,形成一个紊动流段,顺流而下。在紊动还未充分发展的过渡阶段,某处流动会在一段时间为紊流,另一段时间为层流。图 2.12 为实测管流中不同半径处的流速过程线,从图可见紊流和层流间隔出现的情况。过渡阶段的时均流速  $u(y)$  可表示为

$$u(y) = (1 - \alpha)u_L + \alpha u_T \quad (2.1)$$

式中  $u_L$  为层流时流速,  $u_T$  为紊流时流速,  $\alpha$  称为间歇系数,即紊流所占时间与层流所占时间的比值。

随着时间的推移,紊动斑不断发展,又不断和其他新产生的紊动斑相遇并互相掺混,沿流向紊动斑点复盖的范围不断扩大,直到最后紊动斑合成一个占据全部流动空间的、充分发展了的紊流运动。

图 2. 12 管流中的间歇现象<sup>[5]</sup>

#### 四、充分发展紊流的特性

我们先看看充分发展的紊流现象的特征。图 2. 13 为用流动显示方法测取的紊流图形: (a) 为槽内紊流; (b) 为紊动射流。由图可见紊流中存在极为复杂的各种涡旋运动。图 2. 14 为用无惯性仪器测得紊流中一个固定点的流动参量随时间变化的示波图: (a) 是流速纵向分量的变化; (b) 是压强的变化。由图可见这些流动参量都有强烈的脉动。

这样, 紊流除了具有粘性流体的共同性质如连续性和机械能的粘性耗损等以外, 其主要特征有下列几个。

1. 不规则性 流体质点作极不规则的运动, 它的轨迹是一条蜿蜒曲折的线。流场中各种流动参量的值呈现强烈的脉动现象, 具

图 2.13 流动显示测得的紊流图形<sup>[6]</sup>

(a) 槽内紊流

有一定的随机性质。

2. 扩散性 流体的各项特性如动量、能量、温度和含有物质的浓度等通过紊动向各方传递,一般从高值处向低值处扩散。这个性质在技术工作中常起重要的作用。

3. 三维有涡性 紊流是有涡运动,而且总具有三维的特征。在后面讨论紊流中涡量脉动的一个重要机理——涡体的拉伸时,可以看到这种涡量的瞬时分布不可能是二维的。

4. 大雷诺数 流动的雷诺数超过某个临界值以后,流动不稳

图 2. 13 流动显示测得的紊流图形  
(b) 紊动射流

定, 扰动才能发展形成紊流。

目前比较为大家认可的一个观点是: 紊流是由各种不同尺度的大小涡旋组合而成的复杂运动。正因为这样, 所以能起扩散作用

图 2.14 紊流的脉动现象

和显示出流动的极不规则性。用恰当的流动显示技术可以摄得流动中复杂的涡旋图形的照片如图 2.13 所示。

还要指出,紊动并不是流体本身固有的一种性质(如粘滞性),而是一种特定的流动形态。因此,它的特征对各流体都适用,但和边界条件有密切关系,不同边界类型下的紊流各有其特点,而各自成为一种类型。

## 五、紊流的类型

目前按紊流的流动特点常分为下列几类:

1. 各向同性均匀紊流 指紊动特征(如紊动强度)在流场中各坐标点上是一样的、在各个方向也是一样的紊流。在这种紊流中没有流速梯度,也就没有剪切应力。这是一种最简单的紊流,在实际中很难找到,它只是为便于理论探讨的一个假想模型。风洞格栅后一定距离处的紊流可作近似的各向同性均匀紊流来探讨。

2. 剪切紊流 指有流速梯度因而有剪切力的紊流,实际中的紊流多属于这类。其中又可分为:(1)自由紊流,流速梯度是由间断面引起,紊动发展不受边壁限制。自由射流和绕流体后面的尾流等属于这类。(2)壁面紊流,流速梯度是由固体边壁引起。壁面上紊流边界层、管道和明槽中的紊流都属于这类。分别如图 2.2(a)(b)所示。

## 2.3 统计平均法

紊流的主要特征既然是质点运动很不规则、具有一定的随机性质,用经典力学的确定性方法去研究其运动时会遇到很大的困难,因此就会考虑到用处理随机现象的统计方法进行研究。最早应用统计方法研究紊流的是泰勒(Taylor, G. I. 1921),60多年来发展了一般称为紊流的统计理论,但距离能解决实际问题还很远,系统介绍已超出本书的范围。这里只对用统计方法描述紊流的基本概念作一定的介绍,以为后面讨论和以后在工作中遇到有关问题需要进一步学习时的导引。

首先,描述随机变量大小的一个重要特征是它的平均值。平均的方法有多种,这里介绍在紊流研究中两种主要的平均方法。

### 一、时间平均法

这种方法是将随机变量的瞬时值在一定时段内进行平均。这样对所论变量就有瞬时值、时均值和两者之差的脉动值三个值。以紊流的主要变量流速做典型讨论。以  $u$  表示瞬时流速值,  $\bar{u}$  表示其时间平均值,  $u'$  表示其脉动值,三者的关系为

$$u = \bar{u} + u' \quad (2.2)$$

其中时均值的定义为

$$\bar{u} = \lim_T \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u dt \quad (2.3)$$

式中  $t_0$  为取平均的起始时刻,  $T$  为取平均的时段长。理论上  $T \rightarrow \infty$ , 实际处理时  $T$  的长短看问题性质和精度要求而定。

$$\overline{u'} = \lim_T \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u' dt = 0 \quad (2.4)$$

即一切脉动值的时均值都等于零。

## 二、系综平均法

系综平均法(ensemble average), 或称统计平均法, 或总体平均法。这个方法是在同样条件下重复进行多次试验, 每次试验都要在同一地点同一时间取样, 样本的总和称为总体。设对流场中某点(如图 2.15a 中水箱定常泄流的管内 A 点)进行流速的量测,  $n$  为同一流速  $u$  值出现的次数,  $N$  为样本总数, 则系综平均值为

$$(u)_e = \frac{\sum_{i=1}^n nu_n}{N} \quad (2.5)$$

如果流动是非定常的, 在本例是当水箱中水位变化的情况, 则 A 点流速随时间变化, 其系综平均值的确定需要分时段量测。在每隔一个  $t$  时间测一个  $u_A$  值, 在  $m t$  时间内共测  $m$  个  $u_A$  值。同样条件下重复  $N$  次试验, 这样就可对每个瞬间得到  $N$  个  $u_A$  值, 按式(2.5)分别计算其系综平均值。如  $t$  足够短,  $m$  足够多, 即可得到  $(u_A)_e$  随时间变化的连续曲线如图 2.15(b) 所示。

图 2.15 系综平均

由此可见, 系综平均的方法对于定常流动和非定常流动都是适用的, 是一个具有普遍性的平均方法。至于时间平均法, 从它的



定义可见,对于非定常流动严格说来是不适用的。

系综平均法虽然具有理论上普适的优越性,但实际工作中很难做到足够多次的严格重复的试验,而往往是在时均流动为定常的紊流中,在一个时段  $T$  内测量某定点的流速变化过程进行平均,实际上是时均法。这样就提出一个问题,时间平均值在统计上的作用如何?和系综平均值的关系如何?

从数学上可以证明,当一个随机过程是属于平稳过程 (Stationary process) 而且又具有遍历性或各态历经性 (Ergodic), 亦即满足遍历定理的必要和充分条件时,其时间平均值与系综平均值是相等的。所谓平稳过程是指随机过程的统计特性不随时间推移而变化的过程。遍历定理及其充分与必要条件可参考概率论的书籍。

对于流体力学,遍历定理是否适用尚未得到证明,一般假定定常紊流具有遍历性,故在以后讨论中对时间平均和系综平均不再加以区别。

在采用平均法处理随机变量时,常会遇到对两个变量的平均运算,令  $f$  及  $g$  代表两个变量,有下列运算法则:

$$(1) \quad \overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$(2) \quad \overline{af} = a\overline{f} \quad a \text{ 为常数}$$

$$(3) \quad \overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g} + \overline{f'g'} \quad f, g \text{ 为脉动值}$$

$$(4) \quad \overline{\frac{f}{s}} = \frac{\overline{f}}{\overline{s}}, \quad s = x, y, z, t$$

其中要特别注意第 3 个法则:两变量相乘的平均值等于变量的平均值的乘积加上两变量脉动值的乘积的平均值,即多了后面这一项。这些法则从平均的定义关系式如(2.2)、(2.4)容易得到证明。

紊流的流动参量如流速、压强等都采用平均方法处理时,就可将瞬时运动分解成两部分:平均运动(或时均运动)和脉动,前者用流动参量的平均值(时均值)描述其运动,后者用脉动值描述其

运动,具体方程在下章讨论。对于一般实际问题,主要在于求平均运动(时均运动)。

进行紊流的讨论时,由于方程中项数繁多,目前多采用一种下标符号:用  $x_1, x_2, x_3$  代表直角坐标的三个坐标轴,合并起来以  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 表示。例如对于平行的时均流动,  $x_1$  代表时均流动方向,  $x_2$  代表垂直方向或竖向,  $x_3$  代表横向。流速和所有的矢量参量都用下标  $i$  代表  $i$  方向的分量,如  $u_i$  即代表三个分量  $u_1, u_2$  和  $u_3$ 。除  $i$  外,也可用  $j, k$  等作为下标符号。有一个规定:在一项中有一个下标符号重复出现时,此项即代表这个下标符号为 1、2、3 时的各项之和,例如

$$\frac{u_i}{x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{u_i}{x_i} = \frac{u_1}{x_1} + \frac{u_2}{x_2} + \frac{u_3}{x_3}$$

如有重复下标而不要求各项相加,则需加以说明。反之在一项中的下标没有重复出现的就不代表各项相加,例如  $a_i b_j$  代表  $i=1, 2, 3$  和  $j=1, 2, 3$  的 9 个独立变量  $a_1 b_1, a_1 b_2, a_1 b_3, a_2 b_1, a_2 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1, a_3 b_2$  和  $a_3 b_3$  而无需相加。 $a_i b_j$  也称为张量。又如  $(a_i b_j - a_j b_i)$  也不要相加。

## 2.4 紊动的概率分布

随机变量的另一个重要特征是它的概率分布。仍以流速  $u$  作为随机变量讨论有关的概念如下。

**频率与概率** 在观测  $N$  个  $u$  的数据中,设在  $u_a < u < u_b$  的范围内的数据有  $n$  个,则  $\frac{n}{N}$  称为  $u$  出现在  $u_a < u < u_b$  间的频率 (frequency)。当  $N$  的数目不断加大,频率逐渐趋近一个极限值  $P$ ,称为  $u_a < u < u_b$  之间  $u$  的概率 (probability), 即

$$P(u_a < u < u_b) = \lim_N \frac{n}{N} \quad (2.6)$$

概率密度函数 上述表示方法是适用于离散变量的情况。如果  $u$  的变化是连续的, 则采用另一种表示方法。令  $-\infty < u < \infty$  的区间, 即小于  $u_a$  值的概率定义为  $u$  的分布函数  $F(u)$  在  $u$  的值, 即

$$F(u) = P(-\infty < u < u_a) = P(-\infty, u_a) \quad (2.7)$$

分布函数对  $u$  的导数

$$\frac{dF(u)}{du} = p(u) \quad (2.8)$$

称为概率密度函数(probability density function), 则

$$F(u) = \int_{-\infty}^u p(u) du \quad (2.9)$$

当  $u$  增加一个微量  $du$  时, 分布函数的增量  $dF(u)$  就是  $u$  在  $du$  区间的概率。

从概率的定义可知

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u) du = 1 \quad (2.10)$$

也就是在  $u$  增大的过程中,  $F(u)$  的值在 0 与 1 之间, 见图 2.16 (a)。

要了解  $u$  的变化情况, 就是要知道它的分布函数, 或者它的概

图 2.16 分布函数与概率密度函数

率密度函数。

随机变量的分布函数的形式有多种,其中最重要的是正态分布,或称高斯分布。正态分布函数为

$$F(u) = \int_{-\infty}^u p(u) du = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^u \exp - \frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2} du \quad (2.11)$$

相应的概率密度函数为

$$p(u) = \frac{1}{\sigma} \exp - \frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2} \quad (2.12)$$

式中  $\mu$  为  $u$  的统计平均值或称数学期望,从它的概念的建立,可以定义为

$$(\mu)_e = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} u p(u) du \quad (2.13)$$

为标准差,它的定义为

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \mu)^2 p(u) du \quad (2.14)$$

$\sigma^2$  称为方差。

正态分布是左右对称的,如图 2.17(a) 所示。当  $u = \mu$  时,  $p(u)$  具有最大值。  $\sigma$  愈小,  $u$  值愈集中在  $\mu$  的附近,分布曲线愈陡。在  $u = \mu \pm \sigma$  处为拐点。  $p(u)$  曲线以下的总面积为  $\int_{-\infty}^{\infty} p(u) du = 1$ 。

如改以脉动流速  $u$  作为随机变量,即设  $\mu = 0$ ,则分布曲线对称于  $p(u)$  轴如图 2.17(b) 所示。显然  $p(u) = p(u)$ 。

在均匀紊流,流速的概率分布接近正态分布。得到格栅后紊流实测资料的证实。

在剪切紊流,一般说来脉动流速的概率分布不是正态的。在流动的轴线附近略为接近正态,愈近边壁或自由紊流的边缘,偏离正态愈大。总的说来,由于流动受连续性规律的制约,运动不可能完全是随机的。

图 2.17 正态分布

## 2.5 流速的统计矩

流速统计平均值的定义是  $\bar{u} = \int u p(u) du$ , 此式可以解释为平均值  $\bar{u}$  是  $u$  值对原点的一阶矩(图 2.17a)。这个概念可以推广到对原点的任意  $m$  阶矩, 即

$$\text{原点矩: } \bar{u}^m = \int u^m p(u) du \quad (2.15)$$

为简化常取对平均值的矩(即设  $u = 0$ ), 称为中心矩。  $m$  阶的中心矩可表示为

$$\text{中心矩: } \overline{u^m} = \int u^m p(u) du \quad (2.16)$$

各阶统计矩都有其物理意义, 表示分布函数的特征, 因而都是随机变量的重要统计特征。

一阶原点矩  $\bar{u}$  为统计平均值。

一阶中心矩  $\overline{u} = 0$ 。

二阶中心矩  $\overline{u^2} = \bar{u^2} - \bar{u}^2$  称为方差(variance), 表示相对于平均值的平均分散程度, 是应用甚广的一个统计特征。  $\sigma = \sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2}$  称为标

标准差(standard deviation), 值愈大, 正态分布曲线愈宽坦。

三阶中心矩  $\overline{u^3}$  是衡量概率密度曲线偏斜度(skewness)的指标。以  $\overline{u^3}$  将之无量纲化为  $\frac{\overline{u^3}}{\sigma^3} = \beta_3$ , 则  $\beta_3 = 0$  为左右对称的曲线, 对正态分布曲线  $\beta_3 = 0$ 。如  $\beta_3 > 0$ , 曲线不对称, 长尾伸向正轴方向;  $\beta_3 < 0$  则长尾伸向负轴方向。

四阶中心矩  $\overline{u^4}$  是衡量概率密度分布曲线峰态的一个参数, 可无量纲化为  $\frac{\overline{u^4}}{\sigma^4} = \beta_4$ ,  $\beta_4$  值是表示曲线峰态(Kurtosis)或平坦度的一个指标。对正态分布  $\beta_4 = 3$ 。 $\beta_4$  愈大表示峰型愈宽坦。

在紊流研究中, 脉动流速分量  $u_i$  的二阶中心矩  $\overline{u_i^2}$  代表  $i$  分量的紊动强度(turbulence intensity)。有时也用  $\frac{\overline{u_i^2}}{\overline{u^2}}$  代表紊动强

图 2.18 平板紊流边界层的紊动强度分布<sup>[6]</sup>

度,称为  $u_i$  的均方根 (root-mean-square, 常简称为 rms)。如以平均流速或某一特征流速除  $\overline{u^2}$  使之无量纲化,则称为相对紊动强度。

对于实际紊流,测量出脉动流速即可算绘出流场中紊动强度的变化情况,供实际工作分析应用。图 2.18 为平板紊流边界层中紊动分布的例子。图中取边界层外的流速  $U_0$  为特征流速。由图可见在边界层外缘,三个方向紊动强度相同,说明有各向同性的性质。在 80% 的区域中各分量不等,愈近边壁差别愈大,其中沿流向分量最大。图 2.19 为近壁区的紊动强度分布,约在  $\frac{v^* x_2}{25}$  处  $\overline{u^2}$  达到最大,其值为  $0.115U_0 \cdot 3v^*$ 。此外,近年有人还测出粘性底层内的脉动资料,说明在底层内也存在紊动。

图 2.19 平板紊流边界层近壁区的紊动强度分布<sup>[6]</sup>

## 2.6 紊流脉动量的相关

在随机过程的研究中,常要分析两个随机变量之间相互影响的程度,亦即它们的联系程度,在统计学上称为相关(correlation),也称为协方差(covariance)。在紊流中任何两个脉动量之间都存在相关关系。仍以脉动流速为典型进行讨论。脉动流速有下列几种相关:

(1) 同一点上两个脉动分速  $u_i, u_j$  的相关,其定义为

$$\overline{u_i u_j} = \int u_i u_j p(u_i, u_j) du_i du_j \quad (2.17)$$

式中  $p(u_i, u_j)$  称为联合概率密度,  $p(u_i, u_j) du_i du_j$  表示  $u_i$  出现在  $u_i$  和  $u_i + du_i$  之间,同时  $u_j$  又出现在  $u_j$  和  $u_j + du_j$  之间的概率。按此定义,两变量的相关就是其二阶矩。单位质量流体的雷诺应力-  $\overline{u_i u_j}$  是这种相关的重要例子。

两个变量的相关关系常用无量纲的相关系数(correlation coefficient)  $R$  表示。对这种情况,常写为

$$R_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{\overline{u_i^2} \overline{u_j^2}} \quad (\text{不相加}) \quad (2.18)$$

(2) 同一点同一脉动量,但是在不同瞬间  $t$  和  $t + \tau$  的两个量的相关,称为欧拉的时间相关或自相关(autocorrelation)。以  $u_i$  为例,其自相关写为

$$Q_E(t) = \overline{u_i(t) u_i(t + \tau)} \quad (2.19)$$

相应的自相关系数为

$$R_E(t) = \frac{\overline{u_i(t) u_i(t + \tau)}}{\overline{u_i^2}} \quad (2.20)$$

(3) 流场中两点的脉动流速的相关常称为空间相关(spatial correlation)。设其中一点的坐标为  $x$ , 另一点与它的距离为  $r$ , 坐标



为  $x+r$ , 则脉动流速不同分量之间的空间相关为

$$Q_{ij}(x, r) = \overline{u_i(x)u_j(x+r)} \quad (2.21)$$

相应的空间相关系数为

$$R_{ij}(x, r) = \frac{\overline{u_i(x)u_j(x+r)}}{\overline{u_i^2(x)}\overline{u_j^2(x+r)}} \quad (2.22)$$

空间相关是一个二阶张量, 它由 9 个分量 ( $i, j = 1, 2, 3$ ) 组成。

对于各向同性的均匀紊流, 可以证明空间相关中  $i \neq j$  的 6 个分量都为零。而  $i = j$  的 3 个分量中有 2 个相等。因此  $Q_{ij}(x, r)$  只决定于两个相关分量, 它们也有其相应的相关系数。常用的两个相关分量是纵向相关  $\overline{u_1(x_1)u_1(x_1+r)}$  和横向相关  $\overline{u_2(x_1)u_2(x_1+r)}$  如图 2.20 所示。其相应系数分别为

$$\text{纵向相关系数 } f(r) = \frac{\overline{u_1(x_1)u_1(x_1+r)}}{\overline{u_1^2}} \quad (2.23)$$

$$\text{横向相关系数 } g(r) = \frac{\overline{u_2(x_1)u_2(x_1+r)}}{\overline{u_2^2}} \quad (2.24)$$

图 2.21 为  $f(r)$  及  $g(r)$  曲线, 当  $r \rightarrow \infty$ ,  $f(r)$  及  $g(r)$  均为零, 说明距离很远的两点其脉动在统计上没有联系。

以上只讨论脉动流速的二阶相关。在实际紊流中还有其他随机性的脉动变量如压强脉动  $p$ 、温度脉动  $T$  和浓度脉动  $c$  等。它们和脉动

图 2.20 纵向相关和横向相关

流速都可组成相关如  $\overline{u_i p}$ 、 $\overline{u_i T}$ 、 $\overline{u_i c}$  等。脉动流速也有三阶相关如  $\overline{(u_i)_A(u_k)_A(u_j)_B}$ ,  $A, B$  指距离为  $r$  的两点。再者, 前几节讨论

的统计平均、概率分布和统计矩等各种统计概念和统计特征值的表示方法对于压强、温度和浓度等随机变量当然都是适用的,读者可自行类推。

应用相关概念对紊流进行理论研究,自泰勒提出以来有不少工

图 2.21 纵向相关系数和横向相关系数

作,但目前还只限于对各向同性紊流取得一定的成果,可参考紊流的专著。

## 2.7 紊动比尺

在紊流的研究中,常采用紊动比尺作为衡量紊动尺度的一种标准,也是研究紊流的一种手段。紊流理论中用到的比尺有两类:一类称为紊动的微分比尺或微比尺(microscale),也称为耗能比尺(dissipation scale);另一类为紊动的积分比尺(Integral scale)或大比尺(macro scale)。这些比尺可以通过脉动流速的相关推求。

先看时间比尺。按同一点同一脉动流速的自相关系数

$$R_E(t) = \frac{\overline{u_i(t)u_i(t+t)}}{u_i^2}$$

求其积分  $\int_0^{T_E} R_E(t) dt = T_E$  (2.25)

$T_E$  是一个时间,称为欧拉的积分时间比尺。 $T_E$  可粗略地衡量紊动联系着  $u_i$  的最长时段。 $R_E$  与时间的一般关系如图 2.22 所示。将  $R_E(t)$  按泰勒级数展开

$$R_E(t) = 1 + \left. \frac{R_E}{t} \right|_0 t + \frac{1}{2} \left. \frac{^2 R_E}{t^2} \right|_0 t^2 + \dots$$

图 2.22 自相关系数示意

因  $R_E(t)$  是一个  $t$  的对称函数, 所以  $\left. \frac{R_E}{t} \right|_{t=0} = 0$ , 对  $t$  的较小值,  $R_E(t)$  可写为

$$R_E(t) = 1 + \frac{1}{2} \left. \frac{^2 R_E}{t^2} \right|_0 t^2$$

或 
$$R_E(t) = 1 - \frac{t^2}{^2 E}$$

式中 
$$\frac{1}{^2 E} = - \frac{1}{2} \left. \frac{^2 R_E}{t^2} \right|_{t=0} \quad (2.26)$$

$^2 E$  称为欧拉的时间微比尺。 $^2 E$  为与  $R_E(t)$  曲线在  $t=0$  处相切的一个抛物线在  $t$  轴上的截距, 它粗略地衡量紊动联系着  $u_i$  的最短时段。

现讨论长度比尺。上节提到, 对于均匀各向同性紊流, 相关张量只决定于纵向相关系数  $f(r)$  和横向相关系数  $g(r)$ 。现由它们推求长度比尺。

设 A、B 两点都在  $x_1$  轴上, A 点坐标为  $x_1$ , B 点坐标为  $x_1 + r$ , 当  $r$  为小值时,  $u_i(x_1 + r)$  可以写为

$$u_i(x_1 + r) = u_i(x_1) + \frac{u_i(x_1)}{r} r$$

取其方差, 忽略二次微量后为

$$\overline{u_i(x_1) + \frac{u_i(x_1)}{r} r}^2 = \overline{u_i^2(x_1)} + 2u_i(x_1) \frac{u_i(x_1)}{r} r$$

在均匀紊流中, 脉动流速的方差沿程保持不变, 则上式左边与右边第一项应相等, 故

$$\overline{u_i(x_1) \frac{u_i(x_1)}{r}} = 0$$

即脉动流速与其导数的相关为零。将上式取导数可得

$$\overline{u_i \frac{2u_i}{r^2}} + \frac{u_i}{r} = 0$$

或写为

$$\overline{u_i \frac{2u_i}{r^2}} = - \frac{u_i}{r}$$

推广, 当 $u_i$ 及其各次导数的方差均为常数时, 可得下列的一般式:

$$\overline{u_i \frac{(2m+1)u_i}{r^{2m+1}}} = 0 \quad (2.27)$$

及

$$\overline{u_i \frac{2m u_i}{r^{2m}}} = (-1)^m \frac{u_i}{r^m} \quad (2.28)$$

式中 $m$ 为0或任意正整数。

由式(2.23)、(2.24):

$$f(r) = \frac{\overline{u_1(x_1)u_1(x_1+r)}}{\overline{u_1^2}} \quad (2.23)$$

$$g(r) = \frac{\overline{u_2(x_1)u_2(x_1+r)}}{\overline{u_2^2}} \quad (2.24)$$

将 $u_1(x_1+r)$ 按泰勒级数展开:

$$u_1(x_1+r) = u_1(x_1) + r \frac{u_1(x_1)}{r} + \frac{r^2}{2!} \frac{u_1(x_1)}{r^2} + \dots$$

将此式乘以 $u_1(x_1)$ 并进行平均得

$$\overline{u_1(x_1) u_1(x_1 + r)} = \overline{u_1^2(x_1)} + r \overline{u_1(x_1) \frac{u_1(x_1)}{r}} + \frac{r^2}{2!} \overline{u_1(x_1) \frac{u_1(x_1)}{r^2}} + \dots$$

将上式代入式(2.23)并考虑式(2.27), (2.28), 得

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{2! \overline{u_1^2}} \overline{\frac{u_1}{r}}_{r=0}^2 + \frac{r^4}{4! \overline{u_1^2}} \overline{\frac{u_1}{r^2}}_{r=0}^2 - \dots \quad (2.29)$$

如只取前二项并令

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2 \overline{u_1^2}} \overline{\frac{u_1}{r}}_{r=0}^2 = - \frac{1}{2} \overline{\frac{2f}{r^2}}_{r=0} \quad (2.30)$$

则得  $f(r) = 1 - \frac{r^2}{2f}$  (2.31)

同理可得  $g(r) = 1 - \frac{r^2}{2g}$  (2.32)

式中  $\frac{1}{g} = \frac{1}{2 \overline{u_2^2}} \overline{\frac{u_2}{r}}_{r=0}^2 = - \frac{1}{2} \overline{\frac{2g}{r^2}}_{r=0}$  (2.33)

因  $\overline{\frac{u_1}{r}}$ ,  $\overline{\frac{u_2}{r}}$  分别代表纵向和横向脉动流速梯度的均方值,  $f$  和  $g$  可作为表示这种变化率的尺度。脉动速度的梯度可认为是微小涡旋所引起的, 因而  $f$  和  $g$  就是微小涡旋纵向和横向平均尺度的一种衡量。因紊动能量的耗损是由  $\overline{\frac{u_i}{r}^2}$  确定的,  $f$  和  $g$  也是耗能涡旋尺度的一种度量。所以  $f$  和  $g$  称为紊动的纵向微比尺和横向微比尺, 也称为纵向耗能比尺和横向耗能比尺。

两种微比尺之间可证明有下列关系

$$f = \frac{1}{2} g \quad (2.34)$$

从纵向和横向的相关系数还可得出两个积分比尺:

$$\text{纵向积分比尺} \quad \bar{f} = \int_0^r f(r) dr \quad (2.35)$$

$$\text{横向积分比尺} \quad \bar{g} = \int_0^r g(r) dr \quad (2.36)$$

它们分别表示两点的纵向脉动流速或横向脉动流速发生相关的最大平均距离。

对于均匀紊流, 可以求得长度比尺和时间比尺之间的关系如下。

在均匀紊流, 设时均流速  $u = u_1$ , 当脉动流速  $u_1 \gg u_1'$  时, 可以近似得到

$$\frac{\overline{u_1'}^2}{u_1^2} = \frac{\overline{u_1'(x_1)u_1'(x_1+r)}}{u_1^2} \quad (2.37)$$

这个关系称为泰勒假设。据此, 有

$$(x_1 + r) - x_1 = u_1[(t + \tau) - t]$$

则在  $t$  与  $t + \tau$  时刻的两个脉动流速  $u_1'$  的乘积对  $t$  的平均, 和相应位置  $x_1$  与  $x_1 + r$  的两个  $u_1'$  的乘积对  $x_1$  的平均是等同的, 即

$$\overline{u_1'(x_1)u_1'(x_1+r)} = \overline{u_1'(t)u_1'(t+\tau)}$$

$$\text{由式(2.23)} \quad \overline{u_1'(x_1)u_1'(x_1+r)} = u_1'^2 \bar{f}(r)$$

$$\text{由式(2.20)} \quad \overline{u_1'(t)u_1'(t+\tau)} = u_1'^2 R_E(\tau)$$

$$\text{因此有} \quad \bar{f}(r) = R_E(\tau) \quad (2.38)$$

$$\text{积分得} \quad \int_0^r \bar{f}(r) dr = \int_0^r R_E(\tau) dr = \int_0^r R_E(\tau) d\tau \quad \text{即}$$

$$\bar{f} = u_1 T_E \quad (2.39)$$

这就是纵向积分比尺和欧拉时间积分比尺的关系。同样, 微分比尺之间也有下列关系:

$$\bar{f} = u_1 T_E \quad (2.40)$$

## 2.8 涡旋的拉伸与涡旋级串

前面提到紊流是由各种尺度的大小涡旋组合而成, 本节将讨

论它是怎样发展形成的。涡旋发展的一个主要机理是涡旋的拉伸，下面分几点说明涡旋拉伸的性质及其产生的结果。

(1) 涡旋变形的影响以拉伸为主，拉伸导致涡量的强化。

从 1.8 节的涡量方程出发，将涡量方程写成下标表示的形式如下：

$$\frac{d\omega_i}{dt} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} \quad (2.41)$$

式中左边是涡量的全变率  $\frac{D}{Dt}$ ，右边第一项即我们要分析的涡旋拉伸引起涡量的增减。取一微小的元涡其长度为  $s$ ，沿元涡方向  $s$  的涡量为  $\omega$ ，由涡线定义有

$$\omega = \frac{\Gamma}{s}$$

则 
$$\omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\omega}{s} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} s = \omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

代入式(2.41)，忽略粘性项，并取  $i$  为  $s$  方向得

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{u_s}{s} \omega = \omega \frac{D(\ln s)}{Dt} \quad (2.42)$$

可见涡量  $\omega$  随元涡长度  $s$  的增长而增加，也就是当元涡拉伸时涡量加强。反之，如元涡缩短，涡量也减弱。

涡量场中元涡有拉伸也有压缩，结果涡量是增强还是减弱呢？

现考虑简单的二维应变场，并设  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0$ 。由连续方程有

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = m$$

$m$  为一常量。设  $\omega_1$  为拉伸方向的涡量， $\omega_2$  为压缩方向的涡量，则按式(2.42)有

$$\frac{D\omega_1}{Dt} = \omega_1 m \quad \frac{D\omega_2}{Dt} = - \omega_2 m$$

积分得 
$$\omega_1 = \omega_{10} e^{mt} \quad \omega_2 = \omega_{20} e^{-mt}$$

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2 \omega_0^2 \cosh 2mt$$

上式说明, 对所有  $+mt$ ,  $\omega$  都是增强的。而且在拉伸方向  $x_1$  按  $e^{mt}$  规律增强, 增加的速率很大, 在压缩方向  $x_2$  按  $e^{-mt}$  规律减小, 当  $mt$  值较大时,  $\omega_2$  减弱是很缓慢的。所以总的说来, 元涡拉伸, 断面缩小, 涡量加强是主要的。

(2) 涡旋拉伸的发展说明紊动必然是三维的。

现对  $\omega_j = \frac{u_i}{x_j}$  项取  $i=1, j=2$ , 流动示意如图 2.23。涡量为  $\omega_2$  的元涡在流速梯度  $\frac{u_1}{x_2} > 0$  的作用下, 将发生方向的改变, 原来在  $x_2$  方向的涡量将分出一个  $x_1$  方向的分量, 即发生涡量在各分量上的改变。这种情况继续发展,

图 2.23 元涡方向的改变

可使简单的涡量分布转变为错综复杂的三维涡量分布。从另一方面说, 设想有一个二维的瞬时流动, 其紊动是二维的,  $u_3 = 0, \omega_1 = \omega_2 = 0, \frac{u_i}{x_3} = 0$ 。容易看到

$\omega_j = \frac{u_i}{x_j}$  都等于零, 则元涡将没有拉伸, 得不到强化, 紊动就无法形成与维持。所以可得出结论: 对于紊流, 尽管时均流动可以是二维的, 紊动则必然是三维的, 即瞬时量必然是三维的。

(3) 涡旋拉伸的发展导致小尺度涡旋的各向同性。元涡在一个方向例如  $x_1$  方向的拉伸缩小了断面而强化了涡量, 其结果增大了另外两个方向的流速分量, 这样使得邻近的  $x_2, x_3$  两个方向



的元涡也受到拉伸。伯勒特梭( Bradshaw, P. )提出紊动涡旋的“家谱”(图 2.24)来描述紊动的发展过程。由图可见,一个方向涡旋的拉伸诱发另外两个方向涡旋的拉伸,如此“一代一代”传递下去,各方向的涡旋分布愈来愈趋于均匀。因此得出结论:在紊流中,小尺度涡旋没有特殊的方向性,即具有各向同性的特征。

图 2.24 紊动涡旋的“家谱”<sup>[5]</sup>

(4) 涡旋级串的形成 根据汤森等人的研究,存在于时均流动的各种尺度涡旋中,以方向和流场中的正应变主轴大体一致的涡旋为主,从时均流动吸取能量,然后逐级传递下去。由于涡旋拉伸,尺度逐级变小,转速则增大,粘性应力梯度也随之增大,粘性对涡量的扩散愈来愈重要。当粘性对涡量的扩散与拉伸对涡量的加强互相平衡时,涡旋尺度不再减小,而达到极限,最后能量通过小尺度的涡旋耗损转化为热能。这样形成一个涡旋的级串(vortex cascade)。

在涡旋尺度还没有小到足以使粘性发挥作用以前,能量逐级传递的过程可以认为和粘性无关。消耗能量的数量则决定于开始下传能量的数量。

## 2.9 紊动能谱

紊流在结构上既然可以看作是由许多大小不同的涡旋组成,就会考虑到把紊流分解,研究各种涡旋所占的成分,分析其不同性质以及在能量分布、能量传递和耗损等过程中的作用。对紊动的分解可以从两个角度进行:因为大小不同的涡旋引起不同频率的脉动,所以可按频率将紊动分解成各种脉动,求得其所占脉动能量的分布,称为频率谱(frequency spectrum)。也可认为各种涡旋引起波长不同的波动,于是按波长将紊动分解成不同的波动,求得其所占脉动能量的分布,称为波(数)谱(wave number spectrum)。统称为能谱(energy spectram)。

### 一、频率和波数

常用的频率有两种涵义:一种是单位时间内发生的次数,以  $n$  表示;另一种是单位时间内发生的弧度数,因是以转动一周代表波动一次,也称圆(周)频率,以  $\omega$  表示。两种频率的量纲都是  $T^{-1}$ 。因为发生一次的弧度为  $2\pi$ ,所以  $\omega = 2\pi n$ 。发生一次需要的时间为周期  $T$ ,故  $T = \frac{1}{n} = \frac{2\pi}{\omega}$ 。

波数是指单位距离内按波长计的个数。因波在  $x_1$  方向的前进速度为  $u_1$ ,一个波的长度就等于  $u_1 T$ ,所以波数  $k_1 = \frac{1}{u_1 T} = \frac{n}{u_1}$ 。另一方法是将波长按  $2\pi$  弧度计,单位时间的弧度数为  $2\pi n$ ,距离为  $u_1$ ,相应于一个弧度的波动距离为  $\frac{u_1}{2\pi n}$ ,因而波数  $k_1 = \frac{1}{u_1 / 2\pi n} = \frac{2\pi n}{u_1}$ ,即指单位距离的弧度数。 $k_1$  和  $k_1$  的量纲都是  $L^{-1}$ 。

### 二、一维能谱与三维能谱

能谱中较简单的是一维能谱。讨论限于时均流动为定常的紊

流,以某点的纵向脉动分速  $u_1$  为分析对象,定义

$$\overline{u_1^2} = \int_0^\infty E_1(n) dn \quad (2.43)$$

$E_1(n)$  称为  $u_1(t)$  的能谱密度(energy density spectrum)。 $E_1(n) dn$  表示频率在  $n$  和  $n+dn$  之间的  $(\overline{u_1^2})$ , 所以能谱就表示各种频率的脉动的能量分布。

一维能谱也可用波数表示为

$$\overline{u_1^2} = \int_0^\infty E_1(k_1) dk_1 \quad (2.44)$$

对均匀各向同性紊流,纵向能谱密度  $E_1(k_1)$  和横向能谱密度  $E_2(k_1)$  如图 2.25 所示。

图 2.25 一维能谱曲线

一维能谱简单,但有不足之处,因紊动总是三维的,故需要引入三维能谱。三维能谱用波数  $k$  比用频率  $n$  表示更为方便。现定义三维能谱函数(three dimensional energy spectrum function)  $E(k)$  为

$$\int_0^\infty E(k) dk = \frac{3\overline{u^2}}{2} \quad (2.45)$$

上式说明,三维能谱函数的积分就是单位质量的脉动动能,即  $E(k)$  曲线以下的总面积。使用三维能谱函数也只适用于各向同性的均匀紊流。

能谱分析和相关分析是紊流统计理论的两个重要组成, 都可以建立方程: 相关方程和能谱方程进行分析, 两者在数学上也有密切关系, 这些已超出本书讨论的范围, 可阅读紊流的专著。但由于能谱的性质对不少实际工作常有重要的意义, 下面还拟介绍一点有关三维能谱特性的知识。

### 三、能量级串

按照前述紊流涡旋级串的观点, 紊动能量是通过大涡旋从时均流动吸取, 逐级向小涡旋传递, 最后通过粘性作用转变为热能而耗散的, 这个作用主要由小涡旋来执行。这种能量按涡旋尺度逐级传递的现象称为能量级串(energy cascade)。那么, 各级涡旋占有的能量比例如何, 它们各有什么不同特性, 这正是能谱分析要解决的问题。

经分析研究, 目前认为三维能谱全部波数范围可分为下列几个特性不同的分区如图 2.26 所示。

图 2.26 三维能谱函数的分区

## 1. 大涡旋区

这部分涡旋的能量虽可达总动能的 20% 左右, 但从曲线可见, 尺度大(波数小)的涡旋并不具有大的能量。大涡旋变化缓慢, 时间因素作用小, 所以很稳定。它受时均流动影响大, 各向异性的特点明显。总之这部分涡旋要受外界条件的制约。

根据巴切勒·普鲁德曼(Batchelor-Proudman 1956)的研究, 最小波段的能谱为

$$\lim_{k \rightarrow 0} E(k, t) = I(t) k^4 \quad (2.46)$$

式中 
$$I(t) = \frac{\overline{u^2}}{3} \int_0^{\infty} r^4 f(r, t) dr$$

$I(t)$  是大涡旋区能谱的一个主要因素。大涡旋对紊动扩散起重要作用, 因此紊动扩散系数  $D_t$  也是大涡旋区能谱的主要影响因素之一。紊动扩散问题将在下章论述。

## 2. 载能涡旋区

此区位于能谱曲线  $E(k, t)$  的最大值附近, 能量最大的涡旋称载能涡旋(energy-containing eddies)。其平均波数以  $k_e$  表示, 则载能涡旋的代表尺度  $l_e$  可定义为

$$l_e = \frac{1}{k_e} \quad (2.47)$$

在此区涡旋变化较快, 有

$$\frac{1}{\overline{u^2}} \frac{d \overline{u^2}}{dt} \sim (k_e^3 E)^{1/2} \quad (2.48)$$

故时间  $t$  是决定能谱的影响因素之一。

随着波数加大, 能量耗损渐趋重要, 决定能量耗损的因素有两个: 单位质量的能量耗损率  $\epsilon$  和运动粘性系数  $\nu$ , 所以在载能涡旋区决定能谱的因素为  $\epsilon$ 、 $\nu$  和  $t$ 。三个因素中只有两个是独立的, 从量纲原理, 三者组成一个无量纲数必为一常数, 即

$$\frac{\epsilon t^2}{\nu} = \text{const} \quad (2.49)$$

这是载能涡旋波段的一个特征。

### 3. 统计平衡区

在本区的波段, 紊动的变化已很快, 可以随时适应当地情况。在本区前段大部分范围内, 传递的能量比衰减的为大, 所以各种涡旋可认为相互处于平衡状态, 因此称为统计平衡区 (equilibrium range)。

柯尔莫戈罗夫 (Kolmogorov, A. H. 1941) 对这区提出以下假设: 当  $Re$  较大时在波数较大的区段有本区存在, 其紊动特性不受外界条件的影响而完全受内部因素  $\nu$  和  $\epsilon$  支配, 因而具有普适性。同时从量纲关系提出本区的两个比尺:

$$\text{长度比尺为 } l_c = \frac{\nu^3}{\epsilon}^{1/4} \quad (2.50)$$

$$\text{流速比尺为 } v_c = (\frac{\nu \epsilon}{\nu^2})^{1/4} \quad (2.51)$$

它们代表粘性起主导作用时的小涡旋的特征长度和特征速度。相应于这种涡旋的波数  $k_d$  为

$$k_d = \frac{1}{l_c} \quad (2.52)$$

因  $E$  具有  $L^3 T^{-2}$  的量纲, 按式 (2.50)、(2.51) 的关系, 在平衡区的能谱函数  $E(k, \nu, \epsilon)$  具有下列形式:

$$\frac{E(k)}{\nu^{5/4} \epsilon^{1/4}} = \frac{E(k)}{v_c^2} = f(k, \nu, \epsilon) \quad (2.53)$$

这个关系得到实验的验证。

粘性的能量消耗主要集中在本区后段  $k_d$  附近的波段, 即耗能波段。平衡区内包括耗能波段与紊流边界层内包括粘性底层极为类似。

用特征流速  $\overline{u}^2$ , 特征长度  $l_c$  或  $g$  可以组成两个紊动雷诺数:

$$Re_c = \frac{\overline{u}^2 l_c}{\nu} \quad \text{适用于小波数大涡旋的紊动;}$$

$Re = \frac{\overline{u^2}}{g}$  适用于大波数小涡旋的紊动。

统计平衡区存在的条件是  $k_e$  和  $k_d$  之间的波数范围广, 也就是  $l_e m$ , 由此可以推得

$$Re^{3/2} \gg 1 \quad \text{或} \quad Re_i^{3/4} \gg 1 \quad (2.54)$$

坦内克斯和伦姆利(Tennekes & Lumley 1972) 认为

$$\frac{l_e}{g} > 10 \quad \text{或} \quad Re_i > 100$$

为平衡区存在的条件。

#### 4. 惯性小区

如雷诺数很大, 统计平衡区的波数范围很广, 可设想在平衡区波数较小一端的波段能量消耗甚少而可忽略不计, 则决定能谱的参数可以不考虑 而只有一个, 同时这部分能谱也还没有受到载能涡旋区的因素的影响。这部分波段可称为惯性小区(inertial subrange)。这个设想是柯尔莫戈罗夫提出的。惯性小区的能谱  $E(k, t)$  可表达为

$$E(k, t) = A^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.55)$$

称为柯尔莫戈罗夫能谱, 有时也称为能谱的  $-5/3$  次方定律。

惯性小区存在的条件可表达为

$$Re^{3/4} \gg 1 \quad \text{或} \quad Re_i^{3/8} \gg 1 \quad (2.56)$$

或据坦内克斯和伦姆利分析, 其存在条件为

$$Re_i = 10^4 - 10^5$$

按照这个条件, 实验室流动中不大可能有惯性小区的存在, 只有在地球物理领域中的紊流才会经常有惯性小区。

## 第三章 紊流基础(二)

### ——紊流的基本方程与紊流模型

当流动已通体发展成为紊流, 表征流动性质的各基本参量将遵循什么规律变化? 从基本物理性质上说和层流情况所遵循的物理规律是没有什么不同的, 但由于紊流的特点, 这些规律表现的形式, 即数学的表达模式是要专门建立的。本章的主要内容是为紊流建立各种基本方程, 作为分析计算紊流问题的基础。其途径是按照雷诺于 1895 年提出的, 如前章提到的将紊流分解成时均流动和脉动两部分的方法, 首先建立紊流的连续方程和运动方程。因紊流的能量转化问题在实际工作中有重要意义, 涡旋的概念在认识紊流的机理方面起重要作用, 所以也建立紊流的能量方程和涡量方程。最后对紊流方程的封闭问题, 目前用于解决实际问题的紊流模型进行一些介绍, 以为需用时进一步学习的基础。本章内容限于讨论不可压缩流体的紊流。

### 3.1 紊流的连续方程

不可压缩流体的连续方程可用下标符号写为

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

对上式进行时间平均



$$\overline{\frac{u_i}{x_i}} = \frac{\overline{(u_i + u_i)}}{x_i} = \overline{\frac{u_i}{x_i}} + \overline{\frac{u_i}{x_i}} = 0$$

因 $\overline{u_i} = 0$ , 所以不可压缩流体的紊流时均流动的连续方程为

$$\overline{\frac{u_i}{x_i}} = 0 \quad (3.2)$$

由式(3.1) 有 
$$\frac{\overline{(u_i + u_i)}}{x_i} = \overline{\frac{u_i}{x_i}} + \frac{u_i}{x_i} = 0$$

以式(3.2)代入得

$$\frac{u_i}{x_i} = 0 \quad (3.3)$$

故脉动流速也满足同样形式的连续方程。

### 3.2 紊流的运动方程——雷诺方程

用下标符号可将纳维-斯托克斯方程写为

$$\frac{u_i}{t} + u_j \frac{u_i}{x_j} = - \frac{1}{x_i} \frac{p}{x_i} + \frac{u_i^2}{x_j x_j} + F_i \quad (3.4)$$

式中 $F_i$ 为单位质量力在 $i$ 方向的分量。

用 $u_i = \overline{u_i} + u_i$ ,  $p = \overline{p} + p$ 代入上式得

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{(u_i + u_i)}}{t} + (\overline{u_j} + u_j) \frac{\overline{(u_i + u_i)}}{x_j} \\ & = - \frac{1}{x_i} \frac{\overline{(p + p)}}{x_i} + \frac{u_i^2}{x_j x_j} (\overline{u_i + u_i}) + F_i \end{aligned}$$

对上式取时间平均得(注意平均运算法则及若干等于零的项的消去):

$$\frac{\overline{u_i}}{t} + \overline{u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \overline{u_j \frac{u_i}{x_j}} = - \frac{1}{x_i} \frac{\overline{p}}{x_i} + \frac{\overline{u_i^2}}{x_j x_j} + F_i \quad (3.5)$$

上式左边第三项可以改写为

$$u_j \frac{u_i}{x_j} = \frac{\overline{(u_i u_j)}}{x_j} - u_i \frac{u_j}{x_j}$$

而按式(3.3)  $\frac{\overline{u_j}}{x_j} = 0$ , 所以

$$\overline{u_j \frac{u_i}{x_j}} = \frac{1}{x_j} (\overline{u_i u_j})$$

代入式(3.5)并移项得

$$\frac{\overline{u_i}}{t} + \overline{u_j \frac{u_i}{x_j}} = - \frac{1}{x_i} \overline{p} + \frac{1}{x_j} \overline{\mu \frac{u_i}{x_j}} - \overline{u_i u_j} + F_i \quad (3.6)$$

此式就是不可压缩紊流时均流动的运动方程, 是雷诺首先得出的, 所以常称为雷诺方程。

和 N-S 方程(3.4)比较可知, 上式中的  $-\overline{u_i u_j}$  是紊动对时均流动产生的影响, 称为雷诺应力。当  $i \neq j$  时雷诺应力为切应力, 当  $i = j$  时则为压应力。雷诺应力的物理意义是紊动所产生的动量传递。所以会有动量的传递, 是由于流场中流速分布不均匀, 而后者反映有迁移加速度的存在。因此可以说, 紊动应力起源于迁移加速度。

雷诺方程还可以写成另一种形式。将式(3.6)右边第二项粘性

切应力作如下的改变: 加上一项  $\frac{1}{x_j} \overline{\mu \frac{u_i}{x_i}}$  成为

$$\frac{1}{x_j} \overline{\mu \frac{u_i}{x_j}} = \frac{1}{x_j} \overline{\mu \frac{u_i}{x_j}} + \frac{1}{x_i} \overline{\mu \frac{u_i}{x_i}}$$

因为  $\frac{1}{x_j} \overline{\mu \frac{u_i}{x_i}} = \frac{1}{x_i} \overline{\mu \frac{u_i}{x_j}} = 0$   $\frac{1}{x_j} \overline{\mu \frac{u_i}{x_j}} = 0$ , 故上式实际上是配上一个等于零的项而实质没有改变。但这样易表达其物理意义, 因

$\frac{1}{x_j} \overline{\mu \frac{u_i}{x_j}} + \frac{1}{x_i} \overline{\mu \frac{u_i}{x_i}}$  是流体质点在时均流动中的剪切变形率  $\overline{S_{ij}}$  的二倍。表示为

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_j} \overline{\mu \frac{u_i}{x_j}} + \frac{1}{x_i} \overline{\mu \frac{u_i}{x_i}} \right) \quad (3.7)$$

$\overline{S_{ij}}$  称为时均应变张量。则可得

$$\overline{\mu} \frac{\overline{u}_i}{x_j} + \frac{\overline{u}_j}{x_i} = \overline{\mu} (2 \overline{S_{ij}}) \quad (3.8)$$

再将压强  $\overline{p}$  和  $2 \overline{\mu S_{ij}}$  合在一起, 组成一个时均应力张量, 记为  $\overline{\tau_{ij}}$ , 即

$$-\overline{p} \delta_{ij} + 2 \overline{\mu S_{ij}} = \overline{\tau_{ij}} \quad (3.9)$$

式中  $\delta_{ij}$  称为 Kronecker  $\delta$ , 其定义为当  $i=j$ ,  $\delta_{ij}=1$ ; 当  $i \neq j$ ,  $\delta_{ij}=0$ 。

应力张量和应变张量也可以分解为时均值和脉动值, 即

$$S_{ij} = \overline{S_{ij}} + S'_{ij} \quad (3.10)$$

$$\tau_{ij} = \overline{\tau_{ij}} + \tau'_{ij} \quad (3.11)$$

经过这些变换后, 雷诺方程可写为

$$\frac{\overline{u}_i}{t} + \overline{u}_j \frac{\overline{u}_i}{x_j} = \frac{1}{x_j} \overline{\tau_{ij}} - \overline{u_i u_j} + F_i \quad (3.12)$$

现在讨论的紊流其时均流动都是定常的, 质量力为重力。在无自由面的流场中, 重力可包括在压强梯度之内, 则上式可简化为

$$\overline{u}_j \frac{\overline{u}_i}{x_j} = \frac{1}{x_j} \overline{\tau_{ij}} - \overline{u_i u_j} \quad (3.13)$$

经过推导得到时均紊流 4 个基本方程: 1 个连续方程和 3 个运动方程。未知数除 3 个时均流速分量和 1 个时均压强外, 尚有 6 个雷诺应力 ( $-\overline{u_i u_j}$  共有 9 项, 但因  $\overline{u_i u_j} = \overline{u_j u_i}$ , 独立的只有 6 个), 共 10 个, 远超过方程的数目。所以时均紊流的方程组没有封闭, 还不能求解。这是紊流研究中没有解决的问题, 留待后面专节讨论。

对于紊流边界层流动, 可按 1.9 节中对层流边界层采取量级分析的简化方法, 将雷诺方程进行简化, 得出时均定常紊流边界层方程组如下(不用下标符号)。

平面流动的方程组:

$$\overline{u}_1 \frac{\overline{u}_1}{x_1} + \overline{u}_2 \frac{\overline{u}_1}{x_2} = -\frac{1}{x_1} \overline{p} + \frac{1}{x_2} \overline{\mu} \frac{\overline{u}_1}{x_2} - \overline{u_1 u_2} \quad (3.14)$$

$$\frac{\overline{p}}{x_2} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\overline{u_1}}{x_1} + \frac{\overline{u_2}}{x_2} = 0 \quad (3.16)$$

轴对称流动的方程组:

$$\overline{u} \frac{\overline{u}}{x} + \overline{v_r} \frac{\overline{u}}{r} = - \frac{1}{x} \frac{\overline{p}}{x} + \frac{1}{r} \frac{\overline{p}}{r} - \mu \frac{\overline{u}}{r} - \overline{u v_r} \quad (3.17)$$

$$\frac{\overline{p}}{r} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\overline{u}}{x} + \frac{1}{r} \frac{(r \overline{v_r})}{r} = 0 \quad (3.19)$$

式中  $\overline{u}$  为轴向时均分速;  $\overline{v_r}$  为径向时均分速。

### 3.3 紊流的能量方程

对不可压缩流体, 能量指的是机械能。研究紊流中能量的转化过程即能量如何传递、扩散、最后耗损的过程, 是探讨紊流内部机理以及紊流的发展与衰减规律的重要内容。为此, 采用时均方法处理时, 就需要分别对瞬时流动、时均流动和脉动建立其能量方程, 以便于分析紊流中能量的消长平衡关系。

#### 一、紊流瞬时流动的能量方程

紊流瞬时流动是由 N-S 方程描述。方程各项代表作用于单位质量流体的力, 对各项乘以瞬时流速就成为力的功率, 也就是单位质量流体在单位时间内各种能量的变化值。为便于讨论, 不考虑质量力项, N-S 方程为

$$\frac{u_i}{t} + u_j \frac{u_i}{x_j} = - \frac{1}{x_i} \frac{p}{x_i} + \frac{u_i^2}{x_j x_j} \quad (3.4a)$$

考虑到 
$$\frac{u_j}{x_j} \frac{u_i}{x_i} = \frac{u_j}{x_i} \frac{u_i}{x_j} = 0$$

则 
$$\frac{u_i^2}{x_j x_j} = \frac{u_i}{x_j} \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_i}{x_i}$$

代入式(3.4a), 并以  $u_i$  乘式中各项得

$$u_i \frac{u_i}{t} + u_i u_j \frac{u_i}{x_j} = - \frac{u_i}{x_i} \frac{p}{x_i} + \frac{u_i}{x_j} \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_i}{x_i} u_i$$

而  $u_i \frac{u_i}{x_j} \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} = \frac{u_i}{x_j} u_i \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} - \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \frac{u_i}{x_j}$

代入上式后可写为

$$\begin{aligned} & - \frac{u_i u_i}{t} \frac{u_i}{2} + \frac{u_i}{x_j} u_j \frac{u_i u_i}{2} + \frac{u_i}{x_j} u_j \frac{p}{x_i} \\ & = \frac{u_i}{x_j} u_i \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} - \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \frac{u_i}{x_j} \end{aligned}$$

将迁移项合并最后得

$$\begin{aligned} \frac{u_i u_i}{t} \frac{u_i}{2} & = - \frac{u_j}{x_j} \frac{p}{x_i} + \frac{u_i u_i}{2} + \frac{u_i}{x_j} u_i \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \\ & - \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \frac{u_i}{x_j} \end{aligned} \quad (3.20)$$

上式即为不可压缩流体瞬时流动的能量方程, 也是紊流总的能量方程。式中各项都是对于单位质量流体在单位时间内的变化量, 其物理意义分别如下:

- ( ) 为动能的当地变化;
- ( ) 为机械能的迁移变化;
- ( ) 为粘性应力的功率或对能量的传递;
- ( ) 为机械能耗损(由于粘性应力和变形)。

将式(3.20)各项瞬时值代以时均值加脉动值后, 再取时间平均, 即得到紊流时均的总的能量方程。略去数学推导过程, 写出结果为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\overline{(\overline{u_i u_i})}}{t} + \frac{1}{2} \frac{\overline{q^2}}{t} = & - \frac{\overline{u_j}}{x_j} \overline{p} + \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \\
& + \frac{\overline{u_i}}{x_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} - \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \frac{\overline{u_i}}{x_j} \\
& - \frac{\overline{u_j}}{x_j} \overline{p} + \frac{1}{2} \overline{q^2} - \frac{\overline{u_i}}{x_j} \overline{u_i u_j} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\overline{u_j q^2}}{x_j} + \frac{\overline{u_i}}{x_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \\
& - \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \frac{\overline{u_i}}{x_j} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

式中  $q^2 = u_i u_i = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ 。

## 二、紊流时均流动的能量方程

将代表时均流动的雷诺方程(3.6)略去质量力项以后,乘以时均流速  $\overline{u_i}$ , 即得时均流动部分的能量方程如下:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{u_i u_i}}{t} + \frac{\overline{u_j}}{x_j} \overline{p} + \frac{\overline{u_i u_i}}{2} \\
= - \left( - \frac{\overline{u_i u_j}}{x_j} \right) \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_j} \left( - \frac{\overline{u_i u_j}}{x_j} \right) \frac{\overline{u_i}}{x_j} \\
+ \frac{\overline{u_i}}{x_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} - \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \frac{\overline{u_i}}{x_j} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

方程中各项都是对单位质量流体在单位时间内的变化量,其物理意义分别为:

- ( ) 时均动能的当地变化;
- ( ) 时均机械能的迁移变化;
- ( ) 紊动应力对流体在时均流动中变形所做的功。当  $i = j$ ,

$-\overline{u_i u_j}$  为切应力,一般与  $\frac{\overline{u_i}}{x_j}$  同号,故这项为负值,表示为时均流动

的能量损失。当  $i = j$ ,  $-\overline{u_i u_j}$  为正应力, 这项的符号决定于  $-\frac{\overline{u_i}}{x_j}$ , 可正可负。在一般情况下, 正应力的功远小于切应力的功, 这项中切应力是主要的。所以总的来说是从时均流动取走能量。从下面可知这部分能量转化为脉动能, 故这项是紊动的产生项;

- ( ) 紊动应力所做的功, 即对时均能量的传递, 或称扩散项;
- ( ) 粘性应力所做的功即对能量的传递;
- ( ) 粘性应力所做的变形功。从前面讨论知

$$-\overline{\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \frac{u_i}{x_j}} = -\overline{S_{ij} S_{ij}}$$

$\overline{S_{ij} S_{ij}}$  的平方总是正的, 故这项总是负值, 说明粘性应力的变形功总是消耗时均流动的能量, 它将转化为热能而在分子运动中耗散。

从上面看到, 紊动应力和粘性应力在时均流动中都有传递能量的扩散项及做变形功的耗损项, 现将相应的项作量级的比较如下。

取  $v$  为特征流速,  $l$  为特征长度, 则

$$\begin{aligned} \overline{S_{ij}} &\sim \frac{v}{l} & \overline{u_i u_j} &\sim v^2 \\ \overline{u_i u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} &\sim v^2 \frac{v}{l} \sim v l \overline{S_{ij}} \frac{\overline{u_i}}{x_j} = k_1 v l \overline{S_{ij}} \frac{\overline{u_i}}{x_j} \\ \overline{u_i u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} &\sim v^2 \overline{S_{ij}} \sim v l \overline{S_{ij}} \frac{\overline{u_i}}{x_j} = k_2 v l \overline{S_{ij}} \frac{\overline{u_i}}{x_j} \end{aligned}$$

紊动应力传递项与粘性应力传递项的量级比为

$$\frac{\overline{u_i u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j}}{\frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \frac{\overline{u_i}}{x_j}} = \frac{k_1 v l \overline{S_{ij}} \frac{\overline{u_i}}{x_j}}{2 \overline{S_{ij}} \frac{\overline{u_i}}{x_j}} = \frac{k_1}{2} \frac{v l}{\nu} = \frac{k_1}{2} Re$$

紊动应力耗损项与粘性应力耗损项的量级比为

$$\frac{\overline{u_i u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j}}{\frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \frac{\overline{u_i}}{x_j}} = \frac{k_2 v l \overline{S_{ij}} \frac{\overline{u_i}}{x_j}}{2 \overline{S_{ij}} \frac{\overline{u_i}}{x_j} k_3} = \frac{k_2}{2 k_3} \frac{v l}{\nu} = \frac{k_2}{2 k_3} Re$$

在一般紊流中系数  $k$  等约为 1 的量级, 因而两个紊动项都约为相应粘性项的  $Re$  倍。 $Re$  是个大数, 所以粘性项都较相应的紊动项小得多, 而可以忽略。由此可以推断: 紊流结构几乎和粘性无关, 或者说粘性对紊动的作用只是间接的。

### 三、紊流脉动的能量方程

从紊流的总能量方程(3.21)中减去时均流动部分的能量方程(3.22)即得到紊流脉动部分的能量方程如下:

$$\frac{1}{2} \frac{\overline{q^2}}{t} + \frac{\overline{u_j}}{2} \frac{\overline{q^2}}{x_j} = - \frac{\overline{u_j p}}{x_j} + \frac{\overline{q^2}}{2} - \overline{u_i u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_i}}{x_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} - \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \frac{\overline{u_i}}{x_j} \quad (3.23)$$

上式各项都是对单位质量流体在单位时间内的变化量, 其物理意义如下:

- ( ) 紊动动能的变化, 包括当地变化和时均流产生的迁移变化;
- ( ) 紊动对总紊动机械能的扩散, 或解释为流体的紊动总动压  $\overline{p} + \frac{\overline{q^2}}{2}$  所做的功;
- ( ) 紊动应力对流体在时均流中的变形所做的功;
- ( ) 紊动的粘性切应力对流体所做的功;
- ( ) 紊动动能的粘性耗损(通过粘性切应力对紊动变形做功所耗损)。

需要着重指出的是第( )项, 它是紊动应力对时均流变形所做的功。因  $-\overline{u_i u_j}$  与  $\frac{\overline{u_i}}{x_j}$  一般同号, 故本项为正, 说明对脉动部分来说是通过这个功得到能量。对照时均流动的能量方程(3.22)中的



第( )项, 它的物理意义和表达式都是相同的, 但在时均流动式中是负值, 表明是付出能量。由此可知, 紊动应力对时均流变形所做的功, 其结果是将时均流动的能量转化为脉动的能量。

至于第( )项, 它是粘性应力对紊动变形做的功, 总是负值, 代表紊动能量的耗损, 即紊动能量转化为热能而耗散, 它是最后消耗紊动能量的途径, 是不能忽略的重要项目。

总的说来, 对紊流的能量平衡可以认为某一控制体积中流体的机械能的变化主要有两方面, 一是由于紊动应力的传递(即扩散)和其他部分流体交换, 另一是紊动应力对时均流的变形功将部分时均能量转化为紊动能量, 再最后通过粘性应力的变形功转化为热能而耗损。至于还有小部分粘性应力的传递扩散作用, 则是次要的。

#### 四、紊流边界层中能量的平衡

近二、三十年由于量测手段的进步, 主要通过使用热线(热膜)流速仪, 近年还有激光测速仪, 测得了不少紊流瞬时流速分布的资料。将这些资料整理可以绘出紊流能量方程中各项能量的分布, 从而对能量的平衡关系有更明晰的概念。现以平板紊流边界层为例说明。

首先按平板边界层的特点将紊流能量方程简化, 然后依据它来分析实测的资料。

##### 1. 时均流动的能量平衡关系

设流动为定常的, 压强梯度为零, 粘性项可以忽略, 时均流动的能量方程(3.22)可简化为

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j} \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = - \left( - \overline{u_i u_j} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( - \overline{u_i u_j} \cdot \overline{u_i} \right) \quad (3.24)$$

又因二维边界层中  $i = j = 3$  的各项均为零,  $u_2 n$   $u_1$ ,  $u_2$  各项可忽略,

$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i}$  很小也可忽略, 则上式成为

$$\begin{aligned} & \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} \overline{u_1 u_1} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} \overline{u_1 u_1} \\ & = - \underbrace{\left( - \overline{u_1 u_2} \right)}_{( )} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \underbrace{\left( - \overline{u_1 u_2} \right)}_{( )} \bar{u}_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

式中( )项为时均流动对能量的传递;( )项为紊动能的产生;( )项为紊动切应力所做的功。

汤森实测各项能量的分布如图3.1所示。横坐标为无量纲法

图 3.1 平板紊流边界层时均流动的能量平衡关系<sup>[6]</sup>

( $\delta$ —边界层位移厚度)

向距离  $x_2/\delta$  , 纵坐标是各项能量乘  $\rho v^3$  的无量纲值。由图可见, 紊动能量的产生( )项在近壁面很大, 向外逐渐减小。在距壁面较远的外层流区, 上游传递进来的能量( )几乎等于紊动切应力做功所损失的能量( )。在近壁面的内层, 传递进入的能量( )尚不够

平衡紊动产生项( ), 其差额由( )补偿。这样流层之间必然有能量的交换, 其过程大致如下: 在外层上游传递来的时均流能量较多, 通过紊动应力做功将时均流减速, 取走动能传递给内层。在内层把时均流能量转化为紊动能, 大部分紊动能就地耗损转化为热能, 部分紊动能又扩散到外层, 在外层消耗掉。

## 2. 紊动能量的平衡关系

紊流脉动部分的能量方程(3.23)中各项的相对重要性在近壁区和外层是不同的。在近壁区, 因时均流速小, 时均流动对紊动能量的传递项( )可以忽略, 而粘性应力做功项( )不应忽略。故方程(3.23)可简化为

$$\overline{u_2 \frac{p}{x_2}} + \overline{\frac{q^2}{2}} + \overline{u_1 u_2} \frac{\overline{u_1}}{x_2} = \overline{u_j \frac{u_2}{x_j}} + \overline{\frac{u_j}{x_2}} - \overline{\frac{u_j}{x_i} + \frac{u_i}{x_j} \frac{u_j}{x_i}} \quad (3.26)$$

在外区则相反, 方程(3.23)中的( )项可忽略而( )项不应忽略, 故可简化为

$$\overline{u_1 \frac{q^2}{x_1}} + \overline{u_2 \frac{q^2}{x_2}} = - \overline{u_1 u_2} \frac{\overline{u_1}}{x_2} - \overline{u_2 \frac{p}{x_2} + \frac{q^2}{2}} - \overline{\left( \frac{u_j}{x_i} + \frac{u_i}{x_j} \frac{u_j}{x_i} \right)} \quad (3.27)$$

式中 为  $\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \frac{u_i}{x_j}$  的近似值  $\frac{u_j}{x_i} \frac{u_j}{x_i}$ 。( )项为时均流动的传递;( )项为紊动的产生;( )项为紊动的扩散;( )项为紊动的耗损。

汤森的资料如图 3.2 所示。由图可见, 紊动的产生( )和耗损( )是主要的变化, 这两项在各处差不多互相抵消。时均流动的传递( )很小, 几乎可以忽略。扩散( )在内层边缘是损耗, 到外层转为增值, 表明紊动能从边壁附近向外层流动扩散。

图 3.2 平板紊流边界层中紊动能量的平衡关系<sup>[6]</sup>

边界层断面上紊动能量( $\overline{q^2}$ )的分布和紊动切应力 $-\overline{u_1 u_2}$ 的分布如图3.3所示(按Klebanoff 1955资料)可以看出,紊动能量在

图 3.3 平板边界层中紊动能量分布与紊动切应力分布<sup>[6]</sup>

近壁处最大, 随  $x_2$  增大而减小, 到边界层外边界处为零。紊动切应力在  $x_2 < 0.1$  的范围以内基本上是常数, 以后随  $x_2$  增大而减小, 至边界层外边界为零。

对于其他类型紊流如圆管中紊流, 紊动射流和尾流等都有类似的实测资料, 这里就不列举了。

### 3.4 紊流的涡量方程

紊流是有涡流动, 它的特征之一是流动中含有各种不同尺度的涡旋, 因此用涡量来描述紊流的运动是一个途径。

对于紊流也可将涡量的瞬时值分解为时均值和脉动值, 即

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_i + \omega'_i \quad (3.28)$$

同时可推导出时均流动以涡量表示的连续方程和运动方程的形式。

#### 一、紊流连续方程的涡量形式

紊流瞬时运动以涡量表示的连续方程即第一章1.8节式(1.68), 用下标符号可写为

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.29)$$

以式(3.28)代入并取时间平均得

$$\frac{\partial (\bar{\omega}_i + \omega'_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_i} = 0$$

因按时均定义有  $\frac{\partial \omega'_i}{\partial x_i} = 0$ , 故得

$$\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.30)$$

代入式(3.29)得

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \quad (3.31)$$

由此可知,不可压缩流体运动中涡量的瞬时值、时均值和脉动值都具有相同形式的连续方程。

## 二、紊流运动方程的涡量形式

紊流瞬时运动以涡量表示的运动方程已在第二章 2.8 节中用下标符号写出为

$$\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{u_i}{x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad (2.41)$$

将式(3.28)代入式(2.41)并取时间平均得

$$\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad (3.32)$$

式中

$$\overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j}} = \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial}{\partial x_j}}$$

因 
$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}$$

令 
$$S_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}, R_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}$$

则 
$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{2} S_{ij} + \frac{1}{2} R_{ij} \quad (3.33)$$

又因  $S_{ij} = S_{ji}$ , 而  $R_{ij} = -R_{ji}$ , 可证明  $\frac{\partial}{\partial x_j} R_{ij} = 0$ 。

因此 
$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} S_{ij} \quad (3.34)$$

取时均得

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} S_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{S_{ij}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{S_{ij}}$$

代入式(3.32)得

$$\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{S_{ij}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{S_{ij}} + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad (3.35)$$

这就是紊流时均流动的涡量方程。

考虑到  $\frac{\overline{u_i}}{x_i} = 0$ ,  $\frac{\overline{u_j}}{x_j} = 0$  的关系, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u_j}}{x_j} (\overline{u_j - i}) &= \overline{u_j} \frac{\overline{u_j - i}}{x_j} + \overline{u_j - i} \frac{\overline{u_j}}{x_j} = \overline{u_j} \frac{\overline{u_j - i}}{x_j} \\ \frac{\overline{u_j}}{x_j} (\overline{- j u_i}) &= \overline{- j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \overline{u_i} \frac{\overline{- j}}{x_j} = \overline{- j} S_{ij} \end{aligned}$$

代入式(3.35)可将此方程改写为

$$\frac{\overline{u_i}}{t} + \overline{u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} = - \frac{\overline{(u_j - i)}}{x_j} + \frac{\overline{(u_i - j)}}{x_j} + \overline{- j} S_{ij} + \frac{\overline{u_i}}{x_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} \quad (3.36)$$

式中( )项代表时均涡量的全部变化, 包括当地变化和迁移变化; ( )项为脉动流速  $u_j$  对涡量的传递; ( )项脉动涡量  $- j$  与脉动变形率  $S_{ij}$  相互作用后产生的时均涡量的变化; ( )项为时均涡量与时均变形率相互作用产生的时均涡量的变化; ( )项为粘性对涡量的扩散。

## 3.5 紊流模型

### 一、紊流基本方程组的封闭问题与紊流模型的类型

以上介绍了紊流的基本方程组而没有涉及求解的问题。在实际工作中需要分析的主要是时均流动, 对于不可压缩流体, 支配时均流动的基本方程组是连续方程和雷诺方程:

$$\frac{\overline{u_i}}{x_i} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\overline{u_i}}{t} + \overline{u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} = - \frac{1}{x_i} \frac{\overline{p}}{x_i} + \frac{1}{x_j} \overline{u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} - \overline{u_i u_j} + F_i \quad (3.6)$$

方程数目共 4 个, 而方程中独立变数共有 10 个:  $\overline{u_i}$  (3 个),  $\overline{p}$ ,  $\overline{u_i u_j}$

(6个),所以方程组不封闭,不能求解。如何根据紊流的性质,建立附加的条件,使方程组封闭,即所谓紊流模型(turbulence model),成为紊流研究的一个重要方面。

对于不可压缩流动,建立模型的目的主要是如何确定雷诺应力问题。雷诺应力包含脉动值的二阶相关,紊流的模化需要设法把脉动值的相关进行处理,如表达为时均值的函数。由于紊流内部结构的复杂性,目前尚无法找出一个统一的规律,所以从早年布辛涅斯克的涡粘性系数,普朗特的混合长度等较简单的模型开始,陆续提出不少模型。到近年计算机得到广泛应用后,这方面的研究工作又得到大发展,各种较精确化的不同类型的模化方法很多,可以从不同角度将紊流模型进行分类。例如从着眼于以什么物理量为主来考虑,则有时均流速场(MVF)的封闭法及时均紊动场(MTF)的封闭法之分,前者在于建立雷诺应力和时均流速分布之间的关系,后者则在于建立某种紊动量的关系如时均雷诺应力,时均脉动能量,能量耗损率等的关系式。如果从解方程组时所增建的偏微分方程的数目来分类,则有零方程、一方程、二方程和多方程等模型。下面不严格按某一角度而是混合地取较重要的模型进行简括的介绍。

## 二、零方程模型

这类模型只需用时均流速的偏微分方程组,不再增加任何脉动量的偏微分方程,所以也称为时均流模型。当然在这种模型还需建立雷诺应力项和时均流速之间的关系。按照这个关系的不同,又有下列几个模型:

### 1. 涡粘性模型

这是布辛涅斯克(Boussinesq, J. V. 1877)提出的最早的紊流半经验理论。他将紊动产生的紊动应力与粘性产生的粘性应力进行比拟,既然单位质量流体的粘性切应力等于粘性系数和变形率



的乘积, 即  $\overline{\frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i}}$ , 于是认为可以将紊动切应力也表示为一个涡粘性(紊动粘性)系数  $\tau$  和变形率的乘积

$$\overline{u_i u_j} = \tau \left( \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i} \right) \quad (3.37)$$

布氏把  $\tau$  和粘性系数  $\mu$  比拟, 看作一个常数。事实上两者有本质的区别, 粘性系数是代表流体的一种物理特性, 它的数值只取决于流体的性质, 和流动的情况无关。 $\tau$  则代表紊动的特性, 显然和流动情况有关, 后者又与边界条件密切相关。各处流动状况不同, 就会有不同的  $\tau$  值, 一般不能看作常数(特殊情况如自由紊流除外)。此外, 式(3.37)也存在严重缺点: 当  $i=j$  时, 式中左边成为  $\overline{u_i u_i}$ , 等于单位质量流体的紊动动能的 2 倍。而右边成为  $2\tau \frac{u_i}{x_i}$ , 在不可压缩流体  $\frac{u_i}{x_i} = 0$ ,  $\tau$  为有限值, 则右边等于零。左边动能不等于零(除非没有脉动), 因此是不合理的。

虽然涡粘性模型有这些缺点, 但这个模型简单, 提出后在实际问题中应用不少, 在解决一般简单问题中也能起一定作用, 而且后来许多改进的模型常以它为基点, 所以还是有一定的价值。

## 2. 混合长度模型

这是普朗特(Prandtl, L. 1925)提出的。他将流体质团的紊动和气体分子运动比拟, 相应于气体分子布朗运动的平均自由程, 提出流体质团作紊动运动时具有混合长度的概念, 假定紊动的质团也要在运行一个混合长度的距离后才和周围流体混合, 失去原来的特性。这样, 对于二维平行流动, 当时均流速不相等的两层流体之间由于流速脉动产生动量传递时, 按动量定律并设  $u_1 \sim u_2$ , 可导出紊动切应力的关系式

$$\overline{u_1 u_2} = l^2 \left| \frac{d\overline{u_1}}{dx_2} \right| \frac{d\overline{u_1}}{dx_2} \quad (3.38)$$

式中  $l$  为混合长度, 这就是混合长度模型的表达式。将此式和式 (3.37) 比较可知, 混合长度模型实际上是令涡粘性系数为

$$\tau = l^2 \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} \quad (3.39)$$

要使式 (3.38) 可以计算, 必须知道  $l$ 。为此, 普朗特作出假定:

$$\text{在固体壁面附近} \quad l = \alpha x_2 \quad (3.40)$$

$x_2$  为离开壁面的法向距离,  $\alpha$  为常数, 由实测资料确定。目前多用  $\alpha = 0.4$ 。

在远离壁面的自由紊流(如射流), 假定在横断面上  $l$  是一个常数, 且与断面上混合区的宽度  $b$  成正比。取流速梯度近似等于断面上最大流速和最小流速之差除以宽度  $b$ , 即

$$\frac{d\bar{u}_1}{dx_2} = \frac{1}{b} (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min})$$

$$\text{则有} \quad \tau = \alpha^2 \bar{u}_1 \bar{u}_2 = \alpha^2 b (\bar{u}_{\max} - \bar{u}_{\min}) \frac{d\bar{u}_1}{dx_2} \quad (3.41)$$

应用这些假定推算出的流速分布和实测资料吻合得很好。因此, 混合长度模型在实际问题中, 如管道和明槽均匀流、边界层等流动得到广泛的应用(见一般流体力学或水力学书籍)。

卡门(K á m á n, T. von 1930)对混合长度的确定提出紊动局部相似假说, 主要内容包括两点:

(1) 除紧靠壁面区域外, 紊动机理和流体的粘性无关。

(2) 脉动流速场各点附近的局部情况, 在统计意义上是彼此相似的, 只有长度和时间的尺度不同。

由此出发卡门得出紊动的长度尺度即混合长度为

$$l = \frac{\bar{u}_1}{\frac{d\bar{u}_1}{dx_2}} \quad (3.42)$$

常数  $\alpha$  和式 (3.39) 中的相同, 称为卡门通用常数。

混合长度理论是目前在实际工作中应用最广的一个紊流模型, 取得了很多成果。但还要指出, 这个模型原则上也还存在不少

问题。

实际混合是一个连续的过程, 现假定流体质团要经过一定距离才发生混合与实际不符。此外, 紊流既是由许多尺度差别很大的涡旋所组成, 混合长度  $l$  代表哪一种涡旋的尺度是不明确的。如代表大尺度的涡旋(它可以和流场横向尺度同量级), 则和推导公式时把  $l$  作为很小值有矛盾。如果传递各种不同特性和物质时各有不同尺度的涡旋起主要作用, 则不同问题应各用不同的混合长度, 这是不合理的。

其次, 在推理中把脉动流速  $u_1$  看作只和时均流速梯度有关, 在实际情况, 如明槽水面和圆管中心处, 时均流速梯度均为零, 按推理脉动流速  $u_1$  也应为零, 而实测资料表明该处  $u_1$  并不很小, 不能忽略。

还有推理中假定  $u_2 \sim u_1$ , 这和实测资料也不全符合, 如在壁面附近,  $u_1 \propto u_2$ , 当  $x_2 = 0$  时,  $u_2 = 0$ , 而  $u_1 \neq 0$ 。所以二者在  $x_2$  方向的分布规律并不相同。

为避免上述矛盾, 普朗特后来(1942)提出较复杂的涡粘性系数公式

$$\epsilon = l^2 \overline{\left( \frac{du_1}{dx_2} \right)^2} + l_1^2 \overline{\left( \frac{d^2 u_1}{dx_2^2} \right)^2} \quad (3.43)$$

式中  $l_1$  为未知值, 由于有两个长度参数可以由实测值进行调整, 可以和实测资料符合得较好, 但计算要复杂得多, 未得到实际应用。

### 3. 涡量传递模型

泰勒(Taylor, G.I.)早在 1915 年已提出了流体在紊动交换的过程中涡量在一定距离内保持不变的概念, 后来(1932)发展为涡量传递理论。

这个理论的要点是, 把涡量作为一个可以传递的量。泰勒取一个沿  $x_1$  方向的二维平行流动, 在脉动流速  $u_2$  的作用下, 具有

涡量的流体被传递至一定距离的流层,和混合长度理论类似,认为存在一个特征长度为  $l$  的传递距离,流体质团被传递时,在  $l$  的距离以内其涡量保持不变,到达  $l$  距离才和周围流体混合。由于两个流层的涡量不等,混合结果产生涡量的脉动,脉动量可表示为

$$u_3 = l \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \quad (3.44)$$

而

$$\bar{u}_3 = \frac{\bar{u}_2}{x_1} - \frac{\bar{u}_1}{x_2} = - \frac{\bar{u}_1}{x_2}$$

则

$$u_3 = - l \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2}$$

从连续方程及二维平行流条件可导出雷诺应力的梯度为

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (- \overline{u_1 u_2}) = \overline{u_2 u_3} = - \overline{u_2 l} \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2}$$

设

$$u_2 \sim l \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}$$

于是可得

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (- \overline{u_1 u_2}) = l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right| \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2}$$

把  $l$  作为常数,将上式积分得

$$- \overline{u_1 u_2} = \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}{}^2 \quad (3.45)$$

这就是涡量传递模型的关系式。

与上述混合长度模型比较可见两者的形式相同,只是两个特征长度具有下列关系

$$l = \frac{\bar{u}_1}{2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2}} \quad (3.46)$$

实际上,除了在自由紊流情况, $l$  在  $x_2$  方向接近常数,因而应用这个理论比较成功以外,一般  $l$  不大可能是常数,而且得到结果不如混合长度模型结果的简单,所以应用不如混合长度模型广泛。

### 三、一方程模型—— $k$ 方程模型

这类模型在时均流动的偏微分方程组之外,增加一个和紊动

流速尺度有关的偏微分方程。由于零方程模型只有一个反映紊动的特性长度如混合长度,它们存在不少缺点已如前述,因此考虑增加一个能代表紊动流速尺度的变量的传输方程来更全面反映紊流运动。比较典型的变量是单位质量流体的紊动动能

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (3.47)$$

则紊动流速尺度为

$$q = \frac{\overline{u_i u_i}}{2k} \quad (3.48)$$

$k$  的传输方程即在 3.3 节得到的紊流脉动能量方程(3.23)。略去粘性应力做功的扩散项,可写单位紊动动能  $k$  的传输方程的形式为

$$\begin{aligned} \frac{\overline{k}}{t} + \overline{u_j} \frac{\overline{k}}{x_j} = & - \frac{\overline{u_j \frac{u_i u_i}{2} + p}}{x_j} - \overline{u_i u_j} \frac{\overline{u_i}}{x_j} \\ & - \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \frac{\overline{u_i}}{x_j} \end{aligned} \quad (3.49)$$

粘性耗损

式中各项反映了紊动能量的平衡关系。

为使方程组得到封闭,还必须对式(3.49)右边各项进行模化。其中雷诺应力仍用涡粘性模型,它的普遍形式可类比粘性应力与变形率的关系式写为

$$\overline{u_i u_j} = \tau \left( \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.50)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\tau$  则用柯尔莫戈罗夫-普朗特表示式:

$$\tau = C_\mu \overline{k} L \quad (3.51)$$

式中  $C_\mu$  为经验常数,  $L$  为特征长度。扩散和耗损项通常采用下列假设:

$$\overline{u_j \frac{u_i u_i}{2} + p} = \frac{\tau}{k} \frac{k}{x_j} \quad (3.52)$$

$$= C_D \frac{k^{3/2}}{L} \quad (3.53)$$

式中  $k$  和  $C_D$  是经验常数。式(3.52)包含一个扩散梯度的假定,而式(3.53)则是柯尔莫戈罗夫的见解。按照这些模式,  $k$  方程可写为

$$\frac{k}{t} + \overline{u_j \frac{k}{x_j}} = \frac{\tau}{x_j} \frac{\tau}{k} \frac{k}{x_j} + \tau \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \frac{\overline{u_i}}{x_j} - C_D \frac{k^{3/2}}{L} \quad (3.54)$$

这就是紊动能方程模型中应用最多的高雷诺数形式的高雷诺数形式的  $k$  传输方程。经验系数  $C_\mu C_D = 0.08$ ,  $k = 1$ 。

至于特征长度  $L$  的确定,可用类似于混合长度情况的经验关系,例如在近壁区(粘性底层除外),为得到断面上流速按对数分布,要求

$$L = \frac{C_D}{C_\mu^3}^{1/4} x_2 \quad (3.55)$$

紊动能  $k$  方程模型考虑了紊动能的迁移和扩散的传递以及紊动流速尺度的历史影响,因此比混合长度模型优越,后者只考虑局部平衡关系。但应用此模型仍只限于较简单的剪切层内,因对于较复杂的流动,从经验去确定特征长度  $L$  的分布仍是很困难的。

#### 四、二方程模型—— $k$ - 方程模型

这类模型在紊动能方程外又增加了一个确定紊动特征长度  $L$  的偏微分方程,这样在时均流的基本方程之外共有两个偏微分方程。这两个方程可能是紊动能  $k$  和特征长度  $L$  的方程,也可能是  $k$  和紊动能耗损率  $\epsilon$  的方程。下面介绍目前已有不少应用实例的  $k$ - 二方程模型。

$k$  方程上面已有介绍。本来另一方程要表示  $L$  的分布,但目前

提出的方程多不是以  $L$  为自变量, 而是以

$$Z = k^m L^n \quad (3.56)$$

为自变量。其中应用较多的是取  $Z = \frac{k^{3/2}}{L}$ ,  $m = 3/2, n = -1$ , 即

$$\frac{k^{3/2}}{L} \quad (3.53a)$$

方程的建立仍是从  $N-S$  方程出发, 可得准确的 传输方程, 因项目太繁复这里不列出。洛迪(Rodi, w.) 认为在高雷诺数情况下, 可考虑局部各向同性而将 传输方程写为<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\overline{u_j}}{t} + \overline{u_j} \frac{\overline{u_j}}{X_j} = & - \frac{\overline{(u_j)^2}}{X_j} - 2 \frac{\overline{u_i u_i u_k}}{X_k X_j X_j} \\ & \text{当地变化} \quad \text{迁移传递} \quad \text{扩散传递} \quad \text{涡旋拉伸引起的紊动产生} \\ & - 2 \frac{\overline{u_i^2}}{X_j X_j} \\ & \text{粘性耗损} \end{aligned} \quad (3.57)$$

式中的扩散项、产生项和耗损项都要求模化才能封闭方程组。对扩散项常取梯度假定, 令  $\epsilon$  为紊动耗损率, 可写

$$-\overline{u_j} = \frac{\epsilon}{X_j} \quad (3.58)$$

对其他两项采用下列模型假定, 这个模型和格栅形成的紊动吻合, 并可作为剪切流动中的源项:

$$-2 \frac{\overline{u_i u_i u_k}}{X_k X_j X_j} - 2 \frac{\overline{u_i^2}}{X_j X_j} = C_1 \overline{u_i u_j} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.59)$$

式中  $\overline{u_i u_j}$  是  $k$  的产生项  $-\overline{u_i u_j} \frac{\overline{u_i}}{X_j}$ ,  $C_1, C_2$  为经验常数。采用这些假定后, 方程成为

可参阅紊流模型方面专著, 文献[11]中有列载。

$$\frac{\overline{u_j}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_j} = \frac{\overline{u_j}}{x_j} \frac{\overline{u_j}}{x_j} + (C_1 \overline{u_j} - C_2) \frac{k^2}{k} \quad (3.60)$$

当地变化
迁移传递
扩散传递
产生与耗损

涡粘性系数  $\epsilon$  可写为

$$\epsilon = C_\mu \frac{k^2}{k} \quad (3.61)$$

$k$ -模型中几个经验常数可由实验求得。下列数值系按朗德尔(Laundner)和史帕丁(Spalding)的建议,可供参考。

$C_\mu$	$C_1$	$C_2$	$k$
0.09	1.44	1.92	1.0 1.3

以上介绍的只是未计入质量力项情况的标准形式的  $k$ -二方程模型。这种模型因在实际问题应用中取得较好的结果而得到较大的发展,形式有许多变化。例如针对有浮力作用的问题,像热排放的近区计算中,就需要在方程中增加浮力项。又如针对浅水明流的二维计算而建立深度平均的  $k$ -方程模型等,可参考有关文献[11]。环境问题中近年应用这种方程进行数值计算的例子不少,在第六章中我们将介绍一些应用  $k$ -模型计算紊动射流的例子。

## 五、其他模型

下面只简单介绍较重要的两种模型。

### 1. 雷诺应力传输方程模型

以上讨论的紊流模型中,雷诺应力用式(3.50)模化,即假定局部紊动以一个流速尺度表征,雷诺应力和这个尺度相关而没有恰当考虑雷诺应力本身的传输性质。为计及各种雷诺应力在复杂流动中可有不同的发展,因而建立雷诺应力的传输方程模型。

这个方程的建立是先从  $N-S$  方程及雷诺方程出发,使两者组合得出脉动部分的动量方程,然后以  $u_j$ 、 $u_i$  分别乘脉动部分的动量方程的  $i$ 、 $j$  分式,再相加合并整理,取平均得到雷诺应力传输方程



为

$$\frac{D}{Dt}(\overline{u_i u_j}) = \overline{u_i u_j} + T_{ij} + P_{ij} + \overline{u_i u_j} \quad (3.62)$$

式中: 紊动产生项  $\overline{u_i u_j} = - \overline{u_i u_k} \frac{\overline{u_j}}{X_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\overline{u_i}}{X_k}$

紊动扩散项  $T_{ij} = - \overline{\frac{1}{X_k} (u_i u_j u_k)}$

压强作用项  $P_{ij} = - \frac{1}{X_j} \overline{u_i p} + \overline{u_j p} \frac{1}{X_i}$

衰减耗损项  $\overline{u_i u_j} = \overline{u_i u_j} - 2 \frac{\overline{u_i}}{X_k} \frac{\overline{u_j}}{X_k}$

除  $\overline{u_i u_j}$  是雷诺应力的显函数外, 其余各项都要逐项模化。计算工作量较大, 但因素较全面, 具有很大的灵活性, 适于作各种近似, 也已有一定的应用, 如简化为代数应力模型, 与  $k$ - 模型联合应用等, 近年发展较快。

## 2. 大涡旋模拟

这个模拟途径是 70 年代开始探索, 主要观点是对大尺度紊动进行三维的随时间变化的数值计算。在大雷诺数情况下, 对于最小尺度的紊动要计算是不可能的, 因而必须进行模化。目前尚在研究发展中。

其他各种紊流模型很多, 要详细了解可参阅有关专著。

对紊流模型的要求, 要看实际问题中紊动传递项在方程中所起的作用即其相对重要性而定。为得到时均流动一定精确度的推算结果, 在某些问题中运动方程(3.6)左边惯性项主要由右边压强梯度项和(或)质量力(如浮力)项平衡时, 紊动应力项比重小, 则对紊动模化的要求就较低。反之, 对另外一些流动如射流、尾流、复杂边界条件下的热扩散或质量扩散等, 紊动项重要, 对模化要求就较高。所以在解决实际问题时, 选择哪种紊流模型进行计算, 要根据问题性质和精确度要求等因素决定。

## 第四章 扩散理论

### 4.1 概 述

在许多工程技术领域都会遇到流体中含有物质的传输和散布的问题。特别是在环境工程中,工业和生活上排放的污染物质在大气内和水域内的浓度(单位体积流体的含量)分布更是环境保护规划设计所依据的重要资料。而浓度分布的分析则需要掌握扩散与输移的理论。

在讨论扩散现象之前,先提出传输过程(transport processes)的概念:流体中含有物质(如各种污染物),广义上说也包括流体本身的属性(如动量、能量、热量等),在流场内某处转移至另一处的过程称为传输过程。传输可以由不同原因产生,扩散是其中重要的一种。所谓扩散(diffusion)是指流体中含有物质从含量多处向含量少处传输的现象。它可以由分子运动产生,例如在一杯静水中放入颜色或盐分,虽然没有流动,但经较长时间后,颜色或盐分仍能扩散至全杯,这种由于分子运动产生的扩散称为分子扩散(molecular diffusion),分子扩散的速率是很缓慢的。在紊流中,由于流体质团的紊动也产生扩散,称为紊动扩散(turbulent diffusion),紊动扩散比分子扩散要快得多,例如在大气中要快  $10^5 \sim 10^6$  倍,故在紊流中分子扩散常可忽略不计。另一方面,流体中的含有物质还可以随同流体质点的时均运动而转移,称为移流传输(advection),或随流传输,也有称为对流传输的。至于在剪切流

动中,由于时均流速分布的不均匀,引起含有物质散开的现象称为离散(dispersion)或弥散,将在下章专门讨论。

在一般扩散理论中,常先假定流体中含有物质(以下统称扩散质)的存在不改变流体质点的流动特性,即不影响流动,具体些说是流场的速度分布和扩散质的存在无关。这种扩散质只是作为一种标志物质,或称为示踪剂而存在。同时假定在整个运动过程中,流体质点带有的扩散质在数量上是保持不变的,流体质点与质点之间不发生扩散质的转移,扩散质的扩散完全是由于带有扩散质的流体发生掺混的结果。因此,对不可压缩流体,带扩散质的流体质点的总体积在扩散过程中保持不变,其占据的空间范围即其轮廓的形态则是随时间而变化的。由于扩散质存在而对流动产生影响的情况在实际中是存在的,如热污染的散布、海水和淡水的掺混等问题需要考虑流体密度变化的影响,更复杂的还牵涉到生化作用所产生物质的发生与衰减,后者不在本书讨论的范围之内。

扩散理论的研究在分子扩散方面比较成熟。紊动扩散的研究途径有拉格朗日法和欧拉法,紊动扩散理论是泰勒于 1921 年最早提出,研究一维的紊动扩散,至今仍然是紊动扩散理论的基础。离散理论也是由泰勒对圆管层流开始研究,以后推广至紊流,明槽流以及二维和非定常流动等方面,以下将分别加以介绍。实际流动中(地下水渗流除外)分子扩散在量的方面占的比例很小,但因为紊动扩散和离散的分析常用分子扩散来作比拟,故先从分子扩散开始讨论。

## 4.2 分子扩散的费克定律,扩散方程

分子扩散的理论是费克(Fick, A.)在 1855 年首先提出的。他认为盐分在溶液中的扩散现象可以和热传导比拟,提出分子扩散定律如下:单位时间内通过单位面积的溶解物质与溶质浓度在该

面积法线方向的梯度成比例。用数学式表示为

$$Q = - D_m \frac{c}{x_i} \quad (4.1)$$

式中  $Q$  为溶质在  $x_i$  方向的单位通量;  $c$  为溶质浓度(单位体积流体的溶质含量);  $D_m$  为分子扩散系数, 具有  $L^2/T$  的量纲。式中负号表明溶质扩散的方向与浓度梯度方向相反, 即是从浓度高处向浓度低处扩散。式(4-1)通称为费克第一定律。这个公式是一个梯度型的经验公式。

如取另一单位面积和上述面积平行, 距离为  $x_1$ (图 4.1), 在  $x_1$  处溶质(扩散质)浓度为  $c(x_1, t)$ 。在一维扩散中, 单位时间内进入  $x_1$  面的扩散质为  $Q(x_1, t)$ , 从  $x_1 + x_1$  面出去的扩散质为  $Q(x_1, t) + \frac{Q(x_1, t)}{x_1}$

图 4.1 费克第二定律附图

$\times x_1$ , 经过  $t$  时间的进出差为  $\frac{Q(x_1, t)}{x_1} x_1 t$ , 而控制面以内扩

散质的变化量为  $\frac{c(x_1, t)}{t} t \cdot x_1$ 。根据质量守恒定律, 两者之和应为零,

$$-\frac{Q(x_1, t)}{x_1} x_1 t + \frac{c(x_1, t)}{t} t x_1 = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{Q(x_1, t)}{x_1} + \frac{c(x_1, t)}{t} = 0 \quad (4.2)$$

以式(4.1)代入得( $i=1$ )

$$\frac{c(x_1, t)}{t} = D_m \frac{\partial^2 c(x_1, t)}{\partial x_1^2} \quad (4.3)$$

上式称为费克第二定律。

式(4.3)的积分解为(求解见4.8节)

$$c(x_1, t) = \frac{M}{\sqrt{4D_m t}} \exp - \frac{x_1^2}{4D_m t} \quad (4.4)$$

式中  $M$  为  $t=0$  时在  $x_1=0$  处的扩散质的数量, 这些扩散质沿  $x_1$  方向扩散。上式表示扩散质的浓度  $c$  沿  $x_1$  的分布规律, 可见它是按指数规律急剧衰减的。

以上是一维扩散的情况, 当推广至三维时, 按上述相同的步骤不难导出相应于费克第二定律的方程为

$$\frac{c(x_i, t)}{t} = D_m \frac{\partial^2 c(x_i, t)}{\partial x_i^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.5a)$$

即

$$\frac{c}{t} = D_m \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_3^2} \right) \quad (4.5b)$$

或

$$\frac{c}{t} = D_m \nabla^2 c \quad (4.5c)$$

费克第二定律的方程常称为扩散方程。

分子扩散系数随扩散质及流体的种类和温度、压强而变化。下表是在水中一些物质的分子扩散系数值。

表 4.1 物质在水中的分子扩散系数

物 质	温 度( )	分子扩散系数( $\text{cm}^2/\text{s}$ )
氧 $\text{O}_2$	20	$1.80 \times 10^{-5}$
食盐 $\text{NaCl}$	0	$0.784 \times 10^{-5}$
	25	$1.61 \times 10^{-5}$
	50	$2.63 \times 10^{-5}$
甘油	10	$0.63 \times 10^{-5}$

### 4.3 分子扩散的随机游动分析

分子扩散既然是由分子运动产生, 从气体分子运动理论得知,

气体分子是在不断地作随机运动,即布朗运动,故研究分子扩散也可以把分子运动简化,按随机游动(random walk)问题进行分析。

一个气体分子在两次互相碰撞之间的运动距离称为自由程,假设分子的自由程为一固定值  $l$ ,其运动平行于  $x_1$  方向,每个分子沿正  $x_1$  方向运动和沿负  $x_1$  方向运动的概率相等。在这些简化假定下,任一分子经过  $N$  次运动以后,从原来位置前进的距离为  $\pm l \pm l \pm l \pm \dots$  (共有  $N$  项)。因系列中出现正、负号的机会相等,故共有  $2^N$  个可能性。设出现正号的次数为  $p$ ,出现负号的次数为  $q$ ,则有

$$p + q = N \quad \text{又令 } p - q = S \quad (4.6)$$

从式(4.6)得

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(N + S) = \frac{N}{2} \left( 1 + \frac{S}{N} \right) \\ q &= \frac{1}{2}(N - S) = \frac{N}{2} \left( 1 - \frac{S}{N} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

经过  $N$  次运动后,沿  $x_1$  方向前进的距离为  $S_1$ ,这种情况出现的可能组合为  $N! / (p! q!)$ 。因此其概率为

$$P = \frac{N! / (p! q!)}{2^N} \quad (4.8)$$

以式(4.7)代入得

$$P = \frac{N!}{2^N \left( \frac{N}{2} \left( 1 + \frac{S}{N} \right) ! \right) \left( \frac{N}{2} \left( 1 - \frac{S}{N} \right) ! \right)} \quad (4.9)$$

对于分子运动  $N$  是个大数,  $S \ll N$ ,可用下列公式(sterling 公式)

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \ln 2\pi$$

对式(4.9)加以简化,并求得当  $N$  极大时,  $P$  的极限值为

$$P = \frac{2}{n} \exp - \frac{S^2}{2N} \quad (4.10)$$

这就是一个分子在运动  $N$  次后, 从原来位置前进  $S_1$  距离的概率。

令  $a$  表示分子运动速度,  $t$  为分子运动  $N$  次所经历的时间, 则  $N = \frac{at}{l}$ , 又表示  $S_1 = x_1$ , 将它们代入式(4.10)得

$$P = \frac{2l}{at} \exp - \frac{x_1^2}{2lat} \quad (4.11)$$

将上式和式(4.4)比较可见它们具有同样的形式。式(4.4)表示在  $t$  时刻  $x_1$  处扩散质的浓度, 式(4.11)表示带扩散质的分子在  $t$  时刻到达  $x_1$  处的概率, 两者至少应成比例。因此可得

$$D_m = \frac{1}{2} la = \frac{Nl^2}{2t} \quad (4.12)$$

代入式(4.11)得

$$P = \frac{1}{D_m t} \exp - \frac{x_1^2}{4D_m t} \quad (4.13)$$

这是以  $D_m$  表示的分子在  $N$  次运动后到达  $x_1$  处的概率。

现进一步求在  $t$  时刻分子位于  $x_1$  与  $x_1 + \frac{x_1}{2}$  之间的概率  $P$ 。分子到达  $x_1$  后, 下一步运动仍有  $1/2$  机会前进,  $1/2$  机会后退, 因每一步的距离为  $l$ , 下一步运动中离开  $x_1$  至  $x_1 + \frac{x_1}{2}$  的范围的机会为  $\frac{1}{2} \frac{x_1}{l}$  则

$$P = \frac{1}{D_m t} \exp - \frac{x_1^2}{4D_m t} \quad ; \quad \frac{x_1}{2l} = \frac{1}{2} \frac{1}{D_m t} \exp - \frac{x_1^2}{4D_m t} \quad x_1 \quad (4.14)$$

上式表明分子沿  $x_1$  轴方向作随机运动其概率密度  $\frac{P}{x_1}$  的分布符合正态分布。其标准差为

$$= \sqrt{2D_m t} \quad (4.15)$$

平均值为 
$$\bar{x}_1 = \frac{\int_0^{\infty} x_1 dP}{\int_0^{\infty} dP} = 2 \sqrt{D_m t} \quad (4.16)$$

可见平均值和标准差都与  $\sqrt{t}$  成比例。又方差为

$$\overline{x_1^2} = \frac{\int_0^{\infty} x_1^2 dP}{\int_0^{\infty} dP} = 2D_m t \quad (4.17)$$

上式可写为 
$$D_m = \frac{\overline{x_1^2}}{2t} \quad (4.18)$$

即表示分子扩散系数的关系式。

上述结论表明从随机游动分析得到的结果与从费克扩散理论的结果基本上是一致的。虽然这个结论是对于  $N$  为大数、时间  $t$  较长的情况且作了简化假定下得到的,但基本上能反映分子扩散的实际,所以成为研究扩散问题的一个基础。

## 4.4 移流(层流)扩散方程

4.2 节中费克第二定律式(4.5)只描述了扩散质在静止流体中的扩散,表示其浓度在时间上和空间上的变化规律。如果流体是流动的,则扩散质除受分子扩散外还会随流传输,故其浓度的变化要把随流输移和扩散两部分都考虑在内,可分析如下。

在流场内部取微小六面体为控制体积,边长为  $dx_1 dx_2 dx_3$  如图 4.2 所示。在  $dt$  时段,沿  $x_1$  轴方向从左面流入的扩散质为

如令扩散质总量为  $M$ ,对于一维情况,浓度  $c(x_1, t) = \frac{M}{x_1}$ ,  $M = M \cdot P$ . 结合式(4.14)可得

$$c(x_1, t) = \frac{M}{2 \sqrt{D_m t}} \exp - \frac{x_1^2}{4D_m t}$$

就和式(4.4)完全相同。



$cu_1 dx_2 dx_3 dt$ , 通过该面的扩散量为

$$Q dx_2 dx_3 dt = - D_m \frac{c}{x_1} dx_2 dx_3 dt$$

图 4.2 移流扩散方程推导附图

从右面流出的扩散质为  $cu_1 + \frac{(cu_1)}{x_1} dx_1 dx_2 dx_3 dt$ , 扩散量为

$$- D_m \frac{c}{x_1} + \frac{1}{x_1} D_m \frac{c}{x_1} dx_1 dx_2 dx_3 dt。故进出量之差为$$

$$\frac{1}{x_1} cu_1 - D_m \frac{c}{x_1} dx_1 dx_2 dx_3 dt。$$

同理沿  $x_2$  轴、 $x_3$  轴方向的进出量之差分别为

$$\frac{1}{x_2} cu_2 - D_m \frac{c}{x_2} dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

$$\frac{1}{x_3} cu_3 - D_m \frac{c}{x_3} dx_1 dx_2 dx_3 dt$$

在  $dt$  时段内由于浓度  $c$  的变化, 六面体内扩散质的增加量为

$$\frac{c}{t} dt dx_1 dx_2 dx_3$$

设由于生物、化学等各种因素, 六面体内扩散质的发生率(单位时间单位体积的发生量)为  $F_c$ , 按物质守恒定律, 增加量应等于进出

量之差加上发生量,各项均按单位体积单位时间考虑,得到下列关系式

$$\frac{c}{t} = - \frac{cu_1}{X_1} - D_m \frac{c}{X_1} + \frac{cu_2}{X_2} - D_m \frac{c}{X_2} + \frac{cu_3}{X_3} - D_m \frac{c}{X_3} + F_c$$

或

$$\begin{aligned} \frac{c}{t} + \frac{1}{X_1}(cu_1) + \frac{1}{X_2}(cu_2) + \frac{1}{X_3}(cu_3) \\ = D_m \frac{c^2}{X_1^2} + \frac{c^2}{X_2^2} + \frac{c^2}{X_3^2} + F_c \end{aligned} \quad (4.19)$$

用下标符号可写为

$$\frac{c}{t} + \frac{1}{X_i}(cu_i) = D_m \frac{c^2}{X_i X_i} + F_c \quad (4.19a)$$

(4.19)式即为流动情况的移流扩散方程,它表达了在层流情况有分子扩散作用下扩散质的浓度的时空变化规律,式中左边第一项是当地变化,第二项是移流变化,右边第一项是分子扩散,第二项是产生或衰减的源汇项。

## 4.5 紊动扩散——拉格朗日法

### 一、单个质点的紊动扩散——泰勒扩散理论

泰勒于1921年提出用拉格朗日法研究单个质点的紊动扩散,奠定了紊动扩散的理论基础<sup>[13]</sup>。

设标志质点在  $X_2$  方向的流速为  $v_2$ (用  $v_i$  表示拉格朗日法的流速,以区别于欧拉法的流速  $u_i$ ),经时间  $t$  质点从  $t=0$  时的位置  $Y_2(0)$ (用  $Y_i$  表示质点位置)移动到  $Y_2(t)$ ,可表示为

$$Y_2(t) = Y_2(0) + \int_0^t v_2(t) dt \quad (4.20)$$

为研究连续的紊流运动中的扩散,假定紊流场在时间上和空

间上都是均匀的。同时为简单起见,只考虑  $x_2$  方向的一维扩散,并取  $Y_2(0)$  点为原点,即  $Y_2(0) = 0$ 。因  $v_2(t)$  是随机变量,则  $Y_2(t)$  的统计平均值  $\overline{Y_2(t)} = 0$ 。

令开始扩散的时间为  $t_0$ , 经过时间  $t$ , 标志质点移动距离为  $Y_2(t_0 + t)$ , 有

$$Y_2(t_0 + t) = \int_0^t v_2(t_0 + t) dt$$

按上述紊动在时空上均匀的假定,紊动的统计特性不随时间变化,可用时间平均代替统计平均,则  $Y_2(t)$  的均方值可写为

$$\begin{aligned} \overline{Y_2^2(t)} &= \frac{1}{T} \int_0^T Y_2^2(t_0 + t) dt_0 \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt_0 \int_0^t dt \int_0^t v_2(t_0 + t) v_2(t_0 + t) dt \\ &= \int_0^t dt \int_0^t dt \frac{1}{T} \int_0^T v_2(t_0 + t) v_2(t_0 + t) dt_0 \\ &= \int_0^t dt \int_0^t dt \overline{v_2(t_0 + t) v_2(t_0 + t)} \end{aligned}$$

上式的积分是对在不同起始时刻  $t_0$  的许多质点来说的,每一质点再取两个时刻的流速的乘积来平均。

因 
$$\int_0^t dt \int_0^t dt = 2 \int_0^t dt \int_0^t dt$$

式中左边是矩形微元  $dt dt$  从 0 到  $t$  的积分,是一正方形;右边积分则是个三角形,因对称关系故左边积分为右边积分的 2 倍(见图 4.3)。所以  $\overline{Y_2^2(t)}$  式可写为

$$\overline{Y_2^2(t)} = 2 \int_0^t dt \int_0^t \overline{v_2(t_0 + t) v_2(t_0 + t)} dt \quad (4.21)$$

上式中的  $\overline{v_2(t_0 + t) v_2(t_0 + t)}$  的意义是同一质点在时间差为  $t - t =$  的两个流速的乘积对许多质点的平均值。如果象分子运动那样每步运动都是独立的随机运动,彼此毫无历史联系,则这个平均值应为零。但紊动情况则不同,一个质点在两个瞬间的流速是

相关的,只要相隔的时间 不太大,这个平均值不等于零。所以引入一个拉格朗日的自相关系数  $R_L(\tau)$  来表示这个相关,即

$$R_L(\tau) = \frac{\overline{v_i(t)v_i(t+\tau)}}{v_i^2} \quad (4.22)$$

代入式(4.21)得

$$\begin{aligned} \overline{Y_2^2(t)} &= 2 \int_0^t \int_0^t \overline{v_2(t)v_2(t+\tau)} d\tau dt \\ &= 2 \int_0^t \int_0^t \overline{v_2(t)v_2(t-\tau)} d\tau dt \\ &= 2 \int_0^t \overline{v_2^2} \int_0^t R_L(\tau) d\tau dt \quad (4.23) \end{aligned}$$

图 4.3

这是泰勒得出的结果。

对上式进行分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_0^t dt \int_0^t R_L(\tau) d\tau &= \left| \int_0^t R_L(\tau) d\tau \right|_0^t - \int_0^t \tau R_L(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t R_L(\tau) d\tau - \int_0^t \tau R_L(\tau) d\tau \end{aligned}$$

因此式(4.23)成为

$$\overline{Y_2^2(t)} = 2 \overline{v_2^2} \int_0^t (t-\tau) R_L(\tau) d\tau \quad (4.24)$$

这是后来 Kampe de F ́riet(1939)得出的。

对于扩散时间很短或很长的两种极端情况,式(4.24)可以求解如下。

### 1. 扩散时间很短

很小,  $R_L(\tau) \approx 1$ 。故式(4.24)成为

$$\overline{Y_2^2(t)} = \overline{v_2^2} t^2 \quad (4.25a)$$

$$\text{或} \quad \overline{Y_2^2(t)} = Y_2(t) \overline{v_2^2 t} \quad (4.25b)$$

所以在扩散初期, 扩散的发展与时间  $t$  成比例。

## 2. 扩散时间很长

设达到某一时刻  $t^*$  后, 可认为已无相关, 即  $t = t^*$  时,  $R_L(\tau) = 0$ 。则当  $t \gg t^*$  时

$$\int_0^t (t - \tau) R_L(\tau) d\tau = t \int_0^{t^*} R_L(\tau) d\tau - \int_0^{t^*} R_L(\tau) d\tau$$

当  $t$  很大时, 上式右边第二项比第一项小得多, 可以忽略。现今

$$\int_0^{t^*} R_L(\tau) d\tau = T_L \quad (4.26)$$

称为拉格朗日积分时间比尺, 于是式(4.24)成为

$$\overline{Y_2^2(t)} = 2 \overline{v_2^2} t T_L \quad (4.27a)$$

$$\text{或} \quad \overline{Y_2^2(t)} = Y_2(t) \overline{v_2^2} 2t T_L \quad (4.27b)$$

所以在扩散发展很久之后, 扩散的发展与  $\sqrt{t}$  成比例。

拉格朗日积分时间比尺  $T_L$  可以作为质点摆脱历史影响所必需经历的时间的度量。因此可以说, 当  $t \ll T_L$  时式(4.25)成立; 当  $t \gg T_L$  时式(4.27)成立。

将紊动扩散和分子扩散进行比较, 分子扩散是完全随机的, 没有什么历史影响, 其分布为正态分布, 均方差  $\sigma^2$  与扩散时间  $t$  成正比。定常均匀紊流中, 在紊动扩散后期,  $t \gg T_L$  之后, 扩散的均方差  $\overline{Y_2^2(t)}$  也与时间  $t$  成正比。因此可以定义一个与分子扩散系数类似的紊动扩散系数 (coefficient of turbulent or eddy diffusion)  $D_t$  为

$$\begin{aligned} D_t &= \frac{1}{2} \frac{d \overline{Y_2^2(t)}}{dt} = \overline{v_2^2} T_L = \overline{v_2^2} \int_0^{t^*} R_L(\tau) d\tau \\ &= \overline{v_2^2} \int_0^{t^*} R_L(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.28)$$

上式可以写为 
$$D_t = \frac{\overline{v^2}}{2} L \quad (4.29)$$

其中 
$$L = \frac{\overline{v^2}}{2} \int_0^{\infty} R_L(\tau) d\tau \quad (4.30)$$

称为拉格朗日扩散长度比尺。

根据实验资料, 定常均匀紊流的流速场在  $t_m \gg T_L$  后是接近正态分布的, 因此可以认为  $Y_2(t)$  也是按正态分布的。这就是说扩散质的浓度  $c$  满足微分方程(4.3), 即可写

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_t \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (4.31)$$

如浓度  $c(x_2)$  在  $t = t_0$  时为已知, 则上式即可求解。

以上的讨论表明, 在  $t_m \gg T_L$  后, 紊动质点运动已成为随机运动, 紊动扩散和分子扩散遵循相同的规律。

## 二、两质点的相对扩散

上面讨论了单个质点紊动扩散的分析。有时为了更详细地了解扩散的状态, 同时追踪两个质点进行研究。例如为了研究一个扩散质的云团在紊流中扩散时其轮廓外形的变化, 除了该云团质量中心的位置可按单个质点分析外, 还需要分析原来和质量中心有一个距离的其他质点与质量中心之间彼此的相对位置的变化, 也就是两质点的相对扩散问题。

两质点的相对扩散当然和两点原来间距的大小有关。如两点的间距大于紊动的长度积分比尺, 则两点将各自独立地游动, 互不影响。如两点间距小于紊动的某种尺度, 则两点的相对扩散将至少受到部分紊动的作用。后者是需要研究的情况, 下面将对这种情况进行讨论。

设两质点  $i$  和  $j$  的速度为  $(v_i)$  和  $(v_j)$ , 则两点的相对速度为

$$w_{ij} = (v_i) - (v_j) \quad (4.32)$$

两点各自的位移为  $(Y_i)$  和  $(Y_j)$ 。令  $z_{ij}$  表示相对位移, 则

$$z_i = (Y_i) - (Y_i) = z_i(0) + \int_0^t w_i(t) dt \quad (4.33)$$

设紊动场是平稳和均匀的,通过多数的重复试验,可得到对质点的各种特性参数的统计平均值。和分析相对扩散有关的几个变量为

$$\text{相对扩散距离的均方值 } \overline{s^2} = \overline{z_i z_i(t)} \quad (4.34)$$

$$\text{相对扩散系数 } D_r = \frac{1}{2} \frac{d \overline{s^2}}{dt} \quad (4.35)$$

$$\text{相对扩散速度 } v_r = \frac{d}{dt} \sqrt{\overline{s^2} - \overline{s_0^2}} \quad (4.36)$$

式中  $s$  为两点间距长度;  $s_0$  为  $t = t_0$  时的初始间距长度。

两质点相对扩散的自变量为  $s_0$  和  $t_0$ 。  $\overline{s^2}$ 、 $D_r$  和  $v_r$  一般都是  $s_0$  和  $t_0$  的函数,将之变换为以相关表达的形式如下:

$$\begin{aligned} D_r(s_0, t) &= \frac{1}{2} \frac{d \overline{s^2}}{dt} = \overline{z_i(s_0, t) \frac{d}{dt} z_i(s_0, t)} \\ &= \overline{z_i(s_0, t) w_i(s_0, t)} \end{aligned}$$

按式(4.33),上式可写为

$$D_r(s_0, t) = \int_0^t \overline{z_i(s_0, t) w_i(s_0, t)} d \quad (4.37)$$

从式(4.35)可得

$$\overline{s^2} = \overline{s_0^2} + \int_0^t 2D_r(s_0, t) dt = \overline{s_0^2} + 2 \int_0^t dt \int_0^t \overline{w_i(s_0, t) w_i(s_0, t - \tau)} d \quad (4.38)$$

或

$$\overline{s^2} - \overline{s_0^2} = 2 \int_0^t dt \int_0^t \overline{w_i(s_0, t) w_i(s_0, t - \tau)} d$$

$$\text{及 } \frac{d}{dt} \sqrt{\overline{s^2} - \overline{s_0^2}} = \frac{d}{dt} \left[ 2 \int_0^t dt \int_0^t \overline{w_i(s_0, t) w_i(s_0, t - \tau)} d \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.39)$$

按扩散时间  $t$  的长短分别进行分析, 可得下面一些主要结论。

### 1. 扩散时间 $t$ 很短

可认为质点流速不变, 保持在  $t_0$  时的值, 则相对流速的相关  $\overline{w_i(s_0, t) w_i(s_0, t - \tau)} = \overline{w_i(s_0, 0) w_i(s_0, 0)}$ , 即等于常数。由上述各式可得

$$D_r(s_0, t) = \overline{w_i(s_0, t) w_i(s_0, t)} \tau = A_1 t \quad (4.40)$$

$$\overline{s^2}(s_0, t) = \overline{s_0^2} + \overline{w_i(s_0, t) w_i(s_0, t)} \tau^2 = A_1 t^2 \quad (4.41)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{s^2} - \overline{s_0^2}}{s^2 - s_0^2} = \frac{\overline{w_i(s_0, t) w_i(s_0, t)} \tau^{1/2}}{\overline{w_i(s_0, t) w_i(s_0, t)}} = A_1 \quad (4.42)$$

常数  $A_1$  与  $s_0$  的大小有关: (1) 当  $s_0 < \frac{1}{3} - \frac{1}{s_0}$ , 即柯尔莫戈罗夫的紊动比尺, 可认为紊动具有局部各向同性的性质, 可推求得  $A_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{s_0}$ 。(2) 当  $s_0 \gg m$ , 设  $Re$  大到足以有惯性小区的存在, 认为紊动只取决于  $\nu$ , 可推求得  $A_1 = 8.25(\nu/s_0)^{2/3}$ 。

### 2. 扩散时间 $t$ 不短

当  $t$  已增大到这样的程度, 质点的运动已失去历史的影响时,  $s_0$  已没有影响。同时认为还在惯性小区内, 其影响因素只有  $\nu$ 。由量纲关系可得  $\overline{w_i(t) w_i(t)} = A_2 t$ ,  $A_2$  为一常数。从而可得

$$D_r(t) = A_2 t^2 \quad (4.43)$$

$$\overline{s^2}(t) = \frac{2}{3} A_2 t^3 \quad (4.44)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2} A_2 t \quad (4.45)$$

可见在这阶段相对扩散速度按  $t^{1/2}$  加速增大。

在  $D_r(t)$  和  $\overline{s^2}(t)$  两式间消去  $t$ , 可得

详细推导可参阅文献 [6] Hinze 的著作。



$$D_r(s) = \frac{9}{4} A_2^{1/3} (\overline{s^2})^{2/3} \quad (4.46)$$

表明相对扩散系数  $D_r$  与两点间距  $s$  的  $4/3$  次方成比例, 这个关系简称为相对扩散的  $4/3$  次方定律, 是理察森(Richardson, 1926)根据大气扩散的量测资料得到的, 后来得到海洋中不少扩散资料的验证。

### 3. 扩散时间 $t$ 很长

这时两点间距  $s$  很大, 超过大尺度紊动的范围, 两点运动互不相关。在这扩散后期, 可得

$$\begin{aligned} \overline{s^2} &= \overline{z_i z_i(t)} = \overline{[(Y_i) - (Y_i)] [(Y_i) - (Y_i)]} \\ &= \overline{(Y_i) (Y_i) + (Y_i) (Y_i)} = 2 \overline{Y_i Y_i} \end{aligned} \quad (4.47)$$

即两点相对位移的均方值等于单个质点位移均方值的 2 倍。相对扩散系数为

$$D_r = \frac{1}{2} \frac{d \overline{s^2}}{dt} = 2 \overline{Y_i V_i} \quad (4.48)$$

因  $t$  很大时  $\overline{s^2} = 2D_r t$ , 所以

$$\frac{ds}{dt} = \frac{D_r}{2t} = \frac{D_r}{2} t^{-1/2} \quad (4.49)$$

由上式可见在这阶段相对扩散速度降低了。

上述不同扩散阶段中两个质点互相分开速度由不变而按  $t^{1/2}$  增大, 随后又按  $t^{-1/2}$  降低, 这个变化过程可由大尺度紊动所起的作用来解释。扩散初期, 当紊动尺度大于质点间距  $s$ , 紊动只能使两质点一起游荡, 分开速度不会增大; 随着  $s$  的增大, 大尺度紊动开始发生作用促使分开速度增加; 到了后期  $s$  大到超过紊动的尺度时, 紊动又不起作用, 所以分开速度又下降了。

例题 4-1 设在一均匀紊流内, 在 origin 投入许多示踪质粒子, 量测不同时刻粒子的横向位移  $Y$ ,  $Y^2$  的统计平均值  $\overline{Y^2}$  及通过原点

后的时间  $t$  的数值如附表所列。试绘出  $\overline{Y^2} \sim t$  的关系曲线, 据以推求紊动扩散系数  $D_{ty}$ 。同时计算  $\overline{v^2}$  及扩散长度比尺  $L$ 。

$t$ (s)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\overline{Y^2} (10^{-4} \text{m}^2)$	0.06	0.23	0.53	0.93	1.44	2.00	2.59	3.19	3.78	4.38
$\overline{Y^2} (10^{-2} \text{m})$	0.24	0.48	0.73	0.97	1.20	1.41	1.61	1.78	1.94	2.05

[解] 按所给  $\overline{Y^2} \sim t$  资料计算出  $\overline{Y^2} \sim t$  关系一并列于附表内。将上述关系绘出  $\overline{Y^2} \sim t$  及  $\overline{Y^2} \sim t$  曲线如图 4.4(a)、(b) 所示, 曲线验证了单个质点紊动扩散理论分析得到的不同阶段的扩散规律。从图(a)  $\overline{Y^2} \sim t$  曲线看到扩散后期  $t > 0.7\text{s}$  线性关系良好, 取资料计算

$$\frac{\overline{Y^2}}{t} = \frac{\overline{Y^2}_{1.0} - \overline{Y^2}_{0.7}}{1.0 - 0.7} = \frac{4.38 - 2.59}{0.3} = 6.0 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$$

按式(4.28)

$$D_{ty} = \frac{1}{2} \frac{\overline{Y^2}}{t} = \frac{6.0}{2} \times 10^{-4} = 3.0 \times 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$$

从图(b)  $\overline{Y^2} \sim t$  曲线扩散初期的线性关系, 按式(4.25)

$$\frac{\overline{Y^2}}{t} = \frac{\overline{v^2}}{v_2^2} t$$

得 
$$\frac{\overline{v^2}}{v_2^2} = \frac{\overline{Y^2}}{t} = \frac{0.48}{0.2} \times 10^{-2} = 0.024 \text{m/s}$$

$$\overline{v^2} = 0.0006 \text{m}^2/\text{s}^2$$

由式(4.29) 
$$D_{ty} = \frac{\overline{v^2}}{v_2^2} L$$

得扩散长度比尺

附表  $\overline{Y^2} \sim t$  的数值取自: Wen-Hsiung Li, 《Fluid Mechanics in Water Resources Engineering》

图 4.4 例题 4.1 附图

$$L = \frac{D_{ty}}{\overline{v^2}} = \frac{3.0 \times 10^{-4}}{0.024} = 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}$$

## 4.6 紊动扩散——欧拉法

用欧拉法研究紊动扩散不是追踪扩散质的质点,而是研究流动空间中扩散质的浓度分布,即浓度场的确定。

### 一、紊流扩散方程

设  $c$  为流场中某点  $(x_1, x_2, x_3)$  在时刻  $t$  的扩散质浓度,按欧拉法观点,这个浓度应是位置和时间的函数,即

$$c = c(x_1, x_2, x_3, t)$$

在 4.4 节已导出层流情况的移流扩散方程:

$$\begin{aligned} & \frac{c}{t} + \frac{1}{x_1}(cu_1) + \frac{1}{x_2}(cu_2) + \frac{1}{x_3}(cu_3) \\ &= D_m \frac{c^2}{x_1^2} + \frac{c^2}{x_2^2} + \frac{c^2}{x_3^2} + F_c \end{aligned} \quad (4.19)$$

成为浓度  $c$  的控制方程。

在紊流中不但流速有脉动现象, 扩散质浓度也有脉动现象。将  $c$  和  $u_i$  均分解成时均值和脉动值, 即  $c = \bar{c} + c'$ ,  $u_i = \bar{u}_i + u'_i$  代入式 (4.19) 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t}(\bar{c} + c') + \frac{1}{x_1}[(\bar{c} + c')(\bar{u}_1 + u'_1)] \\ & + \frac{1}{x_2}[(\bar{c} + c')(\bar{u}_2 + u'_2)] + \frac{1}{x_3}[(\bar{c} + c')(\bar{u}_3 + u'_3)] \\ &= D_m \frac{(\bar{c} + c')^2}{x_1^2} + \frac{(\bar{c} + c')^2}{x_2^2} + \frac{(\bar{c} + c')^2}{x_3^2} + F_c \end{aligned}$$

将各项展开, 对时间取平均后加以简化, 并考虑到连续方程  $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} +$

$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3} = 0$ , 最后得

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{c}}{t} + \frac{1}{x_1}(\bar{c} \bar{u}_1) + \frac{1}{x_2}(\bar{c} \bar{u}_2) + \frac{1}{x_3}(\bar{c} \bar{u}_3) \\ &= - \frac{1}{x_1} \overline{(c' u'_1)} - \frac{1}{x_2} \overline{(c' u'_2)} - \frac{1}{x_3} \overline{(c' u'_3)} \\ & + D_m \frac{c^2}{x_1^2} + \frac{c^2}{x_2^2} + \frac{c^2}{x_3^2} + F_c \end{aligned} \quad (4.50)$$

上式即为普遍的紊流扩散方程。和式 (4.19) 相比, 多了

$-\frac{1}{x_i} \overline{(c' u'_i)}$  3 个相关梯度项。 $\overline{(c' u'_i)}$  项的物理意义是紊流中通过分别正交于  $x_i$  轴的单位面积在单位时间内传输的紊动扩散量。为了求解  $\bar{c}$ , 这 3 项需要模化。最常用的办法是将紊动扩散与分子扩散

相比拟,采用费克定律,或用布辛涅斯克的方法,令

$$-\overline{c u_i} = D_{ij} \frac{\overline{c}}{x_j} \quad (4.51)$$

式中紊动扩散系数  $D_{ij}$  是一个二阶张量,称为扩散张量。将式(4.51)代入式(4.50)得到

$$\frac{\overline{c}}{t} + \frac{\overline{c u_i}}{x_i} = D_{ij} \frac{\overline{c}}{x_i x_j} + D_m \frac{\overline{c}}{x_i x_i} + F_c \quad (4.52)$$

这就是欧拉型的紊流扩散方程。

紊动的尺度远大于分子运动的尺度,所以  $D_{ij} \gg D_m$ 。故除邻近壁面区域其紊动受到限制以外,分子运动项一般可以忽略。如流动内部没有扩散质的发生与衰减时,  $F_c = 0$ , 则式(4.52)简化为

$$\frac{\overline{c}}{t} + \frac{\overline{c u_i}}{x_i} = D_{ij} \frac{\overline{c}}{x_i x_j} \quad (4.53)$$

紊动扩散系数  $D_{ij}$  应是空间坐标的函数。相对于张量主轴来说,当  $i \neq j$  时  $D_{ij} = 0$ 。因此当流场坐标和张量主轴一致时,  $D_{ij}$  中只有  $D_{11}$ 、 $D_{22}$ 、 $D_{33}$  3项不等于零。于是式(4.53)可简化为

$$\frac{\overline{c}}{t} + \overline{u_i} \frac{\overline{c}}{x_i} = D_{ii} \frac{\overline{c}}{x_i x_i} \quad (4.54)$$

在各向同性的紊流中,  $D_{11} = D_{22} = D_{33} = D_t$ , 因而上式还可简化为

$$\frac{\overline{c}}{t} + \overline{u_i} \frac{\overline{c}}{x_i} = D_t \frac{\overline{c}}{x_i x_i} \quad (4.55)$$

紊流扩散方程是用欧拉法分析紊动扩散的基础。但还没有从理论上解决  $\overline{c u_i}$  或  $D_{ij}$  的问题。对这个问题巴切勒(Batchelor, G. K.) 提出解决的途径(1949, 1952), 为欧拉法的扩散理论打下基础。巴切勒认为标志质点的扩散过程是独立的, 与它的周围有无其它标志质点存在没有关系, 由此得出结论: 一个质点从原来位置经时间  $t$  扩散到某一给定点的概率就代表该点的扩散质浓度的统计平均值。

上述概率表示为  $P(x, t)$ , 可写

$$P(x, t) = \int P(x, t_0) Q(x - x', t, t_0) dx'$$

$P(x, t_0)$  为起始条件,  $Q(x, t, t_0)$  为在  $t_0$  时刻放出的质点经  $t$  时间扩散到  $x$  的概率密度函数。这个函数无法从理论得出, 但从实验资料可知, 位移  $x(t)$  为正态分布, 在此基础上可得出概率  $P(x, t)$  应满足

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D_{ij} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.56)$$

式中

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{x_i x_j(t)} \quad (4.57)$$

将式(4.56)与式(4.53)比较, 后者去掉迁移项  $-\bar{c} \bar{u}_i \frac{\partial P}{\partial x_i}$  以后就和前者完全相同, 这就证实了前面所说的概率可代表浓度的结论。同时对扩散系数  $D_{ij}$  也有了式(4.57)的数学意义。

此外巴切勒还从式(4.57)出发, 进一步论证了: 在定常均匀紊流中, 当扩散时间趋于无限大时, 得到

$$D_{ij} = \text{const} \quad (4.58)$$

的结论。这对于扩散系数性质的认识也是很重要的。

## 二、紊动扩散系数

在紊流扩散方程中紊动扩散系数甚为重要, 在此作下列几点讨论。

首先看紊动扩散系数的性质及其与扩散时间的关系。取应用最广泛的一维扩散讨论。设扩散质沿  $x_2$  方向, 通过单位面积在单位时间内扩散质的数量为  $\overline{c v_2}$ , 可表示为

$$\overline{c v_2} = \frac{1}{T} \int_0^T c(t_0, t) v_2(t_0) dt_0 \quad (4.59)$$

式中  $t_0$  为质点经过该单位面积的时刻;  $t$  为从开始扩散起算的扩

散时间;  $c(t_0, t)$  为扩散质的浓度。设在  $t$  时间内质点流动距离为  $Y_2$ , 按混合长度学说可写

$$c(t_0, t) = - Y_2(t_0, t) \frac{dc}{dx_2}$$

质点流速为 
$$v_2 = \frac{d}{dt} Y_2(t_0, t)$$

代入式(4.59)得

$$\begin{aligned} \overline{c v_2} &= - \frac{dc}{dx_2} \frac{1}{T} \int_0^T Y_2(t_0, t) \frac{d}{dt} Y_2(t_0, t) dt \\ &= - \frac{dc}{dx_2} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{Y_2^2(t)} \end{aligned}$$

引用费克定律 
$$\overline{c v_2} = - D \frac{dc}{dx_2}$$

从以上两式得 
$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{Y_2^2(t)} = \overline{Y_2(t) v_2(t)} \quad (4.60)$$

将式(4.22)的关系代入可得

$$D = \overline{v_2^2} \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (4.61)$$

从式(4.61)可见, 当扩散时间较短,  $R(\tau)$  是时间函数, 所以  $D$  也随时间变化。当扩散时间很长, 式(4.61)可写为

$$(\overline{D})_t = \overline{v_2^2} \int_0^t R_L(\tau) d\tau = \overline{v_2^2} T_L = \frac{\overline{v_2^2}}{V_2} L \quad (4.62)$$

对于各向同性紊流, 当  $t \rightarrow \infty$ ,  $D$  将趋近一个常数。

式(4.62)表明, 当扩散时间较长时,  $D_t$  与  $L$  成比例, 而  $L$  是一个长度积分比尺, 是衡量大尺度紊动的, 因此可认为紊动扩散系数  $D_t$  主要取决于大尺度(低频率)的涡旋运动。

在实际应用中还有一个重要的问题需要知道, 那就是对不同的扩散质, 如动量、能量、热量和各种含有物质, 其扩散系数是否相同的问题。如果作为标志物质来分析, 因为假定在扩散过程中, 扩散质在质点间没有任何转移和交换(它只有位置的改变), 质点本

身是保持不变的,则在这个前提下,不论是哪种扩散质,扩散系数都应该是相等的。这个认为动量的扩散和热量、含有物浓度等扩散之间存在完全的比拟关系,其紊动扩散系数相等的假说,称为雷诺比拟(Reynolds analogy)。

实际上,流体质点带有的扩散质在运动过程中保持不变的程  
度,对不同扩散质是不一样的。因此,对不同扩散质其扩散系数是  
会有差异的。这是一个需要根据各种扩散质的特性具体研究的问  
题。按已有的一些研究,认为热量和含有物浓度的扩散,其紊动扩  
散系数是一样的,它们和动量扩散比较,则彼此的紊动扩散系数有  
差异。

## 4.7 关于扩散方程的求解

扩散方程是一个二阶的偏微分方程,特别是在紊流情况,紊动  
扩散系数性质复杂,求普遍解是很困难的。如用解析法求解,大都  
只能针对简化了的问题。严格说来,在流动情况下移流扩散方程应  
和流体运动基本方程组耦合求解包括浓度的所有基本变量。但在  
标志(示踪)物质的假定下,可以将流场和浓度场分开解算,一般先  
求出流场,然后在已知流速分布下求解移流(或紊流)扩散方程。后  
者有下列几个途径:

(1) 在静止或均匀流动中的扩散 在这种条件下,扩散方程  
可以得到一些较简单的基本解。如从一个固定点瞬时放入或连续  
放入扩散质,当不考虑边界影响时,一维、二维和三维情况都已求  
得解析解。

(2) 剪切流中的一维纵向离散 这种情况是采用过流断面上的  
平均流速和平均浓度来计算,求得的解是断面平均浓度沿纵向的  
分布。这方面的工作已有较多的研究成果,也是目前解决实际问  
题的重要途径。



(3) 剪切流中的二维离散 在宽广的水域中, 特别是不规则的边界条件下, 如大江大河岸边形成的污染带; 岸边各种建筑物(丁坝等)和地形的影响; 水库、湖、池中的扩散等, 一维离散分析常不能满足实际需要, 当水深不是很大时, 可按二维离散分析, 其要点是: 因为垂向扩散比其他方向快得多, 可以假定垂向扩散是瞬时完成的。于是可以采用垂线的浓度平均值计算, 着重分析垂线平均浓度沿横向的变化和沿纵向的变化, 亦即求出它在平面上的分布。

(4) 数值解法 由于扩散方程解算的复杂性, 在当前电子计算机已逐渐得到广泛使用的情况下, 采用数值解法日益增多, 特别是二维以上的计算通常都用数值解法, 有限差分法和有限元法在解移流扩散方程时都有采用, 可参阅计算水力学或计算流体力学方面的书籍。

(5) 物理模型 复杂边界条件下的扩散问题也常采用缩小尺寸的物理模型(实物模型)进行试验研究。在实物模型中可直接观察流动和扩散的现象, 测取流速和扩散质浓度的分布。物理模型比较直观, 对于某些现象和影响因素不甚明确, 因而尚未能建立数学模型的情况, 只要对支配扩散的主要因素抓得正确, 即可设计物理模型。但由于影响扩散的因素太多, 往往会遇到模拟的困难。理论上说要得到完全相似的模拟是不可能的, 只能按实际问题的性质作近似的模拟。而且应尽量使模型不变态(所谓变态模型, 即垂向和水平方向的模型比例尺不同的模型), 否则流动结构因模型变态而扭曲, 扩散就不可能得到相似。

(6) 现场观测 在天然流场中进行扩散质浓度的观测, 得到的资料是最真实可贵的。但工作量和费用都很大, 也还有量测技术的可靠性要求, 一般难以取得很全面系统的资料。通过现场观测, 利用得到的资料来确定扩散方程中的系数是一个常用的方法。

对于复杂而重要的任务, 往往要采用几种途径相互配合或补充, 结合起来解决问题。

## 4.8 静止流体中瞬时源和连续源的扩散

在静止流体中的扩散只有分子扩散。在无边界影响情况下,从点源、线源或面源放出的污染物质的扩散可以求出解析解。这些基本解在环境污染分析中得到较多的应用,也常作为分析复杂问题的基础。现介绍如下。

### 一、瞬时源的扩散

#### 1. 集中投入的情况

当  $t = 0$  时刻, 在 origin 瞬时集中投入质量为  $M$  的扩散质, 分析以后任何时刻在无界空间中的浓度分布, 这是扩散方程最基本的解。

先看一维扩散, 这相当于从正交于扩散方向的一个面源均匀投入扩散质的扩散。采用一维( $x_1$  方向)分子扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} \quad (4.3)$$

在上述初始和边界条件下求解。数学求解的途径有几种, 这里介绍一个从量纲分析入手的方法。浓度  $c(x_1, t)$  仅是  $M, x_1, t, D_m$  的函数, 因扩散方程是线性的,  $c$  应和  $M$  成正比。在一维问题中,  $c$  的量纲是  $\frac{M}{L}$ , 故应有一个特性长度的比例系数, 而扩散系数  $D_m$  的量纲为  $\frac{L^2}{T}$ , 所以选用  $\frac{M}{4D_mt}$  为这个特性长度是合适的。通过这样的量纲分析可得下列关系

$$c = \frac{M}{4D_mt} f \left( \frac{x_1}{4D_mt} \right) \quad (4.63)$$

式中  $4$  和  $4$  是为以后描述式子的意义加上的。

为确定式中的函数  $f$ ，令  $\xi = \frac{x_1}{\sqrt{4D_m t}}$  并将式(4.63)代入式

(4.3)，即变换为常微分方程

$$\frac{df}{d\xi} + 2f = 0 \quad (4.64)$$

它的通解是  $f = c_0 e^{-\xi^2}$  (4.65)

根据扩散质的质量守恒原则，在任何时刻应有

$$c dx_1 = M \quad (4.66)$$

将式(4.65)、(4.63)代入式(4.66)进行积分，可得  $c_0 = 1$ 。因此最后求得瞬时源一维扩散的基本解为

$$c(x_1, t) = \frac{M}{\sqrt{4D_m t}} \exp - \frac{x_1^2}{4D_m t} \quad (4.67)$$

上式表明浓度  $c$  沿  $x_1$  轴的分布是正态分布即高斯分布。如表示(见 4.3 节)

$$2D_m t = \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_1^2}{2D_m t} \quad (4.15)$$

式(4.67)可写为

$$c(x_1, t) = \frac{M}{\sqrt{2}} \exp - \frac{x_1^2}{2} \quad (4.67a)$$

这和第二章 2.4 节概率密度函数的正态分布式(2.12)的形式相同，只是这里讨论的是浓度分布函数。如将图 2.19(a) 的纵坐标  $p(u)$  改为  $c$ ，横坐标  $u$  改为  $x_1$ ，则该图不同  $t$  值的曲线族也就表示不同时刻  $t$  的浓度分布曲线族。愈大，即时间愈长，分布曲线愈平坦。

对浓度分布函数也可以写出其各阶矩

$$C_p = \int x_1^p c dx_1 \quad p \text{ 为阶数}$$

其物理意义和 2.5 节统计矩中讨论的相同，这里不再重复，只强调

其二阶矩即方差<sup>2</sup>和扩散系数的关系如上。在5.7节将再讨论浓度矩的应用。

现看瞬时源的二维扩散,这相应于从 $x_3$ 方向的一条线源均匀投入的扩散质在 $x_1x_2$ 平面方向上的扩散。采用二维扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} \quad (4.68)$$

式中 $D_1, D_2$ 分别表示 $x_1, x_2$ 方向的扩散系数,(在分子扩散 $D_1 = D_2 = D_m$ 。因上述形式的扩散方程还可用于解决分子扩散以外的问题,这些问题各方向的扩散率可能是不等的,故方程保留这个形式。)令

$$c(x_1, x_2, t) = c_1(x_1, t) c_2(x_2, t) \quad (4.69)$$

式中 $c_1$ 与 $x_2$ 无关, $c_2$ 与 $x_1$ 无关,则

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(c_1 c_2) = c_2 \frac{\partial c_1}{\partial t} + c_1 \frac{\partial c_2}{\partial t} = c_2 D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2} + c_1 D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x_2^2} \\ c_2 \frac{\partial c_1}{\partial t} - D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2} + c_1 \frac{\partial c_2}{\partial t} - D_2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial x_2^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

上式只当两个括号内的量分别等于零才能满足,亦即 $c_1$ 和 $c_2$ 应满足瞬时源一维扩散的解(4.67)。将这两个解相乘,并注意到在二维情况,扩散质总量

$$M = \int c dx_1 dx_2$$

得到瞬时源二维扩散的解:

$$c(x_1, x_2, t) = c_1 c_2 = \frac{M}{4 t D_1 D_2} \exp \left[ -\frac{x_1^2}{4 D_1 t} - \frac{x_2^2}{4 D_2 t} \right] \quad (4.71)$$

对于瞬时源的三维扩散,即从一个点源投入扩散质在三维空间的扩散,采用三维扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{ii} \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4.72)$$

应用求解二维扩散方程的类似方法可得瞬时源三维扩散的解:

$$c(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{M}{(4t)^{3/2} (D_1 D_2 D_3)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{x_1^2}{4D_1 t} - \frac{x_2^2}{4D_2 t} - \frac{x_3^2}{4D_3 t} \right] \quad (4.73)$$

式中  $M = \int c dx_1 dx_2 dx_3$

以上集中投入的瞬时源扩散解的推求,也可从普遍情况出发,先从三维扩散方程求解得到瞬时点源的三维扩散公式(4.73),然后按线积分求得均匀线源的二维扩散公式(4.71),再按面积分求得均匀面源的一维扩散公式(4.67)。但这个途径在首先求解点源三维扩散公式时,采用的数学变换处理较复杂些。可参考有关文献。

## 2. 空间上分布投入的情况

扩散质的投入不是集中在一处,而是分布在空间的一定范围上同时投入。这种瞬时分布源情况可考虑为若干个瞬时集中源的叠加,按叠加原理求解。为方便计只讨论浓度分布是一维的,即按面源叠加。设沿  $x_1$  轴上在  $x_1 = \xi$  处  $d\xi$  上面源的强度为

$$M(\xi) = f(\xi) d\xi \quad (4.74)$$

如图 4.5 所示。作为瞬时集中源考虑,由此经时间  $t$  扩散至  $x_1$  处的浓度按式(4.67)应为

$$dc = \frac{f(\xi) d\xi}{4 D_1 t} \exp \left[ -\frac{(x_1 - \xi)^2}{4D_1 t} \right]$$

如起始时瞬时面源扩散质的浓度分布为

$$c(x_1, 0) = f(x_1) \quad a \leq x_1 \leq b$$

则扩散作用叠加后,经时间  $t$  在  $x_1$  处的浓度为

$$c(x_1, t) = \int_a^b \frac{f(\xi)}{4 D_1 t} \exp \left[ -\frac{(x_1 - \xi)^2}{4D_1 t} \right] d\xi \quad (4.75)$$

对于起始时  $f(\xi)$  为一阶函数的情况,这相当于实际问题为

图 4.5 瞬时分布源

一匀直槽道中, 原来没有扩散质, 现在坐标原点右边长距离范围瞬时加入扩散质, 使浓度升为  $c_0$ , 即

$$t = 0 \text{ 时 } f(x_1) = \begin{cases} 0 & x_1 < 0 \\ c_0 & x_1 \geq 0 \end{cases}$$

对于这种情况, 由式(4.75)得

$$c(x_1, t) = \int_0^{\infty} \frac{c_0}{\sqrt{4D_1t}} \exp\left[-\frac{(x_1 - \xi)^2}{4D_1t}\right] d\xi \quad (4.76)$$

令  $w = (x_1 - \xi) / \sqrt{4D_1t}$ , 上式变换为

$$\begin{aligned} c(x_1, t) &= \frac{c_0}{\sqrt{4D_1t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{4D_1t}} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-w^2} dw + \int_0^{\infty} e^{-w^2} dw \right] \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{4D_1t}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \frac{x_1}{\sqrt{4D_1t}} \right] \end{aligned} \quad (4.77)$$

式中  $\operatorname{erf}(z)$  为  $z$  的误差函数, 其定义为

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-w^2} dw \quad (4.78)$$

且有下列性质:  $\text{erf}(-z) = -\text{erf}(z)$ ;  $\text{erf}(0) = 0$ ;  $\text{erf}(\infty) = 1$ 。

又  $1 - \text{erf}(z) = \text{erfc}(z)$  (4.79)

称为补误差函数。

式(4.77)解的浓度分布如图 4.6 所示。

图 4.6 起始为台阶形分布的瞬时源的扩散

误差函数及正态分布的积分值列于表 4.2, 表中  $x$  值在本情况为  $x = \sqrt{2D_1 t}$ 。按给定的扩散系数  $D_1$  和起始浓度  $c_0$  值, 即可求得不同时刻沿  $x_1$  各处的浓度。

表 4.2 误差函数及正态分布的积分

$x$	$\text{erf} \frac{x}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp -\frac{x^2}{2} dx$
0.0	0.0	0.0
0.1	0.1129	0.0398
0.2	0.2227	0.0793
0.3	0.3286	0.1197
0.4	0.4284	0.1554
0.5	0.5205	0.1915
0.6	0.6309	0.2257
0.7	0.6778	0.2580
0.8	0.7421	0.2881
0.9	0.7969	0.3159
1.0	0.8427	0.3413

(续表)

$\frac{x}{\sqrt{2}}$	$\operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x/\sqrt{2}} \exp^{-\frac{x^2}{2}} dx$
1.2	0.9103	0.3849
1.4	0.9523	0.4192
1.6	0.9763	0.4452
1.8	0.9891	0.4641
2.0	0.9953	0.4773
2.5	0.9996	0.4938
3.0	0.99998	0.4987
4.0		0.49996
	1.0000	0.5000

## 二、连续源的扩散

和瞬时源不同,连续源是指在时间上的连续扩散,即从某时刻  $t=0$  开始,在某处连续加入扩散质,求以后任何时刻空间中扩散质的浓度分布。

现讨论较简单的一维连续均匀扩散的情况。设扩散源位于原点  $x_1=0$ ,当  $t=0$ ,沿  $x_1$  轴原来各处浓度均为零,现在  $x_1=0$  处浓度在瞬间突然升高为  $c_0$ ,以后保持不变,求浓度分布函数  $c(x_1, t)$ 。

仍从量纲分析出发,设

$$c = c_0 f \left( \frac{x_1}{\sqrt{D_m t}} \right) = c_0 f(\xi) \quad (4.80)$$

$$\xi = \frac{x_1}{\sqrt{D_m t}}$$

则有

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{2t} \frac{dc}{d\xi}$$

$$\frac{d^2c}{dx_1^2} = \frac{1}{tD_m} \frac{d^2c}{d\xi^2}$$



代入扩散方程(4.3), 即变换为一常微分方程

$$-\frac{1}{2} \frac{df}{d} = \frac{d^2f}{d^2} \quad (4.81)$$

其边界条件为  $f(0) = 1, f(\infty) = 0$ 。因  $c(-x_1, t) = c(x_1, t)$ , 可只沿  $+x_1$  轴求解, 得

$$\begin{aligned} c &= c_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \frac{x_1}{\sqrt{4D_m t}} \right] \\ &= c_0 \operatorname{erfc} \frac{x_1}{\sqrt{4D_m t}} \quad (x_1 > 0) \end{aligned} \quad (4.82)$$

随着时间  $t$  的增加, 沿  $x_1$  轴方向浓度分布的变化如图 4.7 所示。

图 4.7 等强度连续源的一维扩散<sup>[10]</sup>

如果给定的不是原点浓度  $c_0$ , 而是连续加入的扩散质的量, 而且是变化的, 则可以看作无数不同强度的瞬时源产生的扩散在时间上叠加的结果, 每个微时段  $\tau$  加入的扩散质所产生的浓度  $c$  可按瞬时源的关系式考虑, 然后进行从零到  $t$  的时间积分。例如在一维情况, 设在时刻  $\tau$  微时段  $\tau$  加入的扩散质为  $M = f(\tau)d$  如图 4.8 所示, 则经历  $(t - \tau)$  时间扩散产生的浓度为

$$c = \frac{f(\tau)d}{4 D_m (t - \tau)} \exp - \frac{x_1^2}{4D_m(t - \tau)} \quad (4.83)$$

整个连续源扩散产生的浓度为

$$c(x_1, t) = \int_0^t \frac{f(\cdot)}{4 D_m(t - \cdot)} \exp - \frac{x_1^2}{4D_m(t - \cdot)} d \quad (4.84)$$

最后, 如果连续源不是集中在原点, 而是分布在沿  $x_1$  轴一定范围如  $a < x_1 < b$  之上, 则加入的扩散质最一般的情况是时间和空间(距离)的函数, 在  $x_1 = \cdot$  处  $d$  上, 于时刻  $\cdot$  在  $d$  时间内加入的扩散质的量为  $M =$

图 4.8 变强度的连续源

$f(\cdot, \cdot) d d$ , 一维扩散经时间  $(t - \cdot)$  在  $x_1$  处的浓度为

$$c = \frac{f(\cdot, \cdot)}{4 D_m(t - \cdot)} \exp - \frac{(x_1 - \cdot)^2}{4D_m(t - \cdot)} d d \quad (4.85)$$

全部分布连续源一维扩散产生的浓度应将上式积分二次成为

$$c(x_1, t) = \int_0^t \int_a^b \frac{f(\cdot, \cdot)}{4 D_m(t - \cdot)} \exp - \frac{(x_1 - \cdot)^2}{4D_m(t - \cdot)} d d \quad (4.86)$$

具体计算就要看函数  $f(\cdot, \cdot)$  的形式了。如求积分困难时也可用数值方法计算。

对于连续源的二维、三维扩散, 原则上也可按上述方法看作无数个相应瞬时源扩散的叠加, 用相应瞬时源的浓度分布公式进行时间积分计算。

现对等强度连续点源的三维扩散情况求其积分如下。

前面已知瞬时点源三维扩散的浓度分布公式(4.73)为

$$c(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{M}{(4 t)^{3/2} (D_1 D_2 D_3)^{1/2}}$$

$$\times \exp - \frac{x_1^2}{4D_1t} - \frac{x_2^2}{4D_2t} - \frac{x_3^2}{4D_3t}$$

$$M = \quad cdx_1, dx_2dx_3$$

在静止流体中各向同性扩散情况,  $D_1 = D_2 = D_3 = D_m$ , 并令  $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , 上式成为

$$c(r, t) = \frac{M}{(4 D_m t)^{3/2}} \exp - \frac{r^2}{4D_m t} \quad (4.87)$$

将连续点源看作无数瞬时点源的叠加, 设单位时间加入的扩散质的量为  $m$ ,  $m$  不随时间变化。于时刻  $t - d$  时间投入量即源强为  $md$ , 则经历  $(t - d)$  时间扩散在位置  $r$  产生的浓度为

$$dc = \frac{md}{[4 D_m (t - d)]^{3/2}} \exp - \frac{r^2}{4D_m (t - d)} \quad (4.88)$$

连续点源三维扩散从起始到  $t$  时间在位置  $r$  产生的浓度为上式的时间积分

$$c(r, t) = \int_0^t dc = \int_0^t \frac{m}{[4 D_m (t - d)]^{3/2}} \exp - \frac{r^2}{4D_m (t - d)} d \quad (4.89)$$

令  $\xi = \frac{r}{[4D_m(t - d)]^{1/2}}$

则  $d = \frac{r}{(4D_m)^{1/2}} \frac{1}{2} \frac{d\xi}{(t - d)^{3/2}}$

当  $d = 0$  时  $\xi = \frac{r}{4D_m t}$

当  $d = t$  时  $\xi = \infty$

将以上关系代入式(4.89)得

$$\begin{aligned} c(r, t) &= \frac{m}{8( D_m )^{3/2}} \frac{4D_m^{1/2}}{r} \int_{r/2}^{\infty} \frac{1}{D_m t} \exp(-\xi^2) d\xi \\ &= \frac{m}{4 D_m r} \frac{2}{r/2} \frac{1}{D_m t} e^{-\xi^2} d\xi \end{aligned}$$

即 
$$c(r, t) = \frac{m}{4 D_{mr}} \operatorname{erfc} \frac{r}{2 \sqrt{D_{mt}}} \quad (4.90)$$

## 4.9 均匀紊流中的扩散

在流动流体中物质的扩散应按移流扩散方程(在紊流则为紊流扩散方程)分析,在复杂的流动情况求解是困难的,但在单向的均匀流动中,即各处流速均为  $u_1 = U, u_2 = u_3 = 0$  的情况,就有一些解析解。在层流,因边界引起粘性剪切力的存在,这种均匀流动实际是难以遇到的。在紊流,严格说来也不可能出现,因没有剪切力就不能维持均匀紊流而不衰减。因此这只是一假想的流动,但对这种流动的扩散便于作理论分析,对有些实际紊流也可近似应用,故下面针对均匀紊流情况讨论。

紊流扩散方程当忽略分子扩散和发生(或衰减)项,并使坐标轴与扩散张量主轴一致时,成为式(4.54)的形式

$$\frac{\bar{c}}{t} + \bar{u}_i \frac{\bar{c}}{x_i} = D_{ii} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_i \partial x_i}$$

对于上述均匀紊流,方程简化为

$$\frac{\bar{c}}{t} + U \frac{\bar{c}}{x_1} = D_{ii} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4.91)$$

对于以速度  $U$  移动的坐标系  $x_1$  来说

$$x_1 = x_1 - Ut \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial t}$$

代入式(4.91)得

$$\frac{\bar{c}}{t} = D_{11} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_2^2} + D_{33} \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_3^2} \quad (4.93)$$

这个方程的形式就和静止流体中的扩散方程(4.72)完全一样。所以在静止流体中各种情况的扩散方程解都可以适用于上述均匀紊流的情况,差别只在于:坐标  $x_1$  改变为  $x_1 (= x_1 - Ut)$ , 分子扩散系数  $D_m$  改变为紊动扩散系数  $D_{11}$ 。现介绍几种情况如下。

### 一、均匀紊流中瞬时源扩散的浓度分布

这种情况只需将静止流体中瞬时源扩散的解按上述原则改写即得。

#### 1. 瞬时(面)源的一维扩散

一维紊流扩散方程为(以下略去顶上的时均符号)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x_1} = D_{11} \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} \quad (4.94)$$

浓度解为 
$$c(x_1, t) = \frac{M}{4 D_{11} t} \exp - \frac{(x_1 - Ut)^2}{4 D_{11} t} \quad (4.95)$$

#### 2. 瞬时(线)源的二维扩散

二维紊流扩散方程为

$$\frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x_1} = D_{11} \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} \quad (4.96)$$

浓度解为

$$c(x_1, x_2, t) = \frac{M}{4 t D_{11} D_{22}} \exp - \frac{(x_1 - Ut)^2}{4 D_{11} t} - \frac{x_2^2}{4 D_{22} t} \quad (4.97)$$

#### 3. 瞬时点源的三维扩散

三维紊流扩散方程式(4.91), 其浓度解为

$$c(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{M}{(4 t)^{3/2} (D_{11} D_{22} D_{33})^{1/2}} \times \exp - \frac{(x_1 - Ut)^2}{4 D_{11} t} - \frac{x_2^2}{4 D_{22} t} - \frac{x_3^2}{4 D_{33} t} \quad (4.98)$$

## 二、均匀紊流中连续源扩散的浓度分布

### 1. 连续源的一维扩散

当求解条件为

$$c(x_1, 0) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x_1 = \pm \infty \\ c_0 & \text{当 } x_1 = 0 \end{cases}$$

其情况和静止流体中连续源的一维扩散相同,参考式(4.82),可写出这种情况的浓度分布式

$$c(x_1, t) = c_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \frac{x_1 - Ut}{4D_{11}t} \right] \quad (4.99)$$

### 2. 连续源的三维扩散

原则上可按一系列瞬时点源的叠加,从瞬时点源的浓度分布关系式出发进行积分来求解。但这样做即使在各向同性情况,  $D_{11} = D_{22} = D_{33} = D$ , 数学推演也较复杂,而且也要作些近似假定。文献[10]采用一种较简单的方法也得出相同的结果,现介绍如下。

将流动看成是一系列平行薄片组成,薄片厚度为  $\delta x_1$ , 两个界面是无限远的  $x_2 - x_3$  平行平面如图 4.9 所示,这些薄片以速度  $U$  移动通过点源时接纳由点源扩散出的扩散质,单位时间扩散出的质量为  $\dot{M}$ , 每一薄片接纳扩散质团的质量为  $\dot{M} t$ ,  $t$  为该薄片通过点源的时间,  $t = x_1 / U$ 。按瞬时源在平面上二维扩散的浓度分布式(4.71)且  $D_1 = D_2 = D$  时为

$$c(x_2, x_3, t) = \frac{\dot{M}}{4 t D} \exp - \frac{(x_2^2 + x_3^2)}{4 D t}$$

则在薄片单位面积接纳的质量为

$$\frac{\dot{M} t}{4 t D} \exp - \frac{(x_2^2 + x_3^2)}{4 D t} = \frac{\dot{M} x_1}{4 t D U} \exp - \frac{(x_2^2 + x_3^2)}{4 D t}$$

图 4.9 连续源三维扩散化为二维分析<sup>[10]</sup>

转换为三维浓度时需将此单位面积的质量除以  $x_1$ , 同时将变量  $t$  按  $t = x_1/U$  变换, 得

$$c(x_1, x_2, x_3) = \frac{M}{4 D_{X_1}} \exp - \frac{(x_2^2 + x_3^2)U}{4D_{X_1}} \quad (4.100)$$

此即连续点源的三维扩散浓度分布表达式。

### 3. 连续源的二维扩散

和上述分析三维扩散的类似方法可求得连续(线)源的二维扩散浓度分布表达式为

$$c(x_1, x_2) = \frac{M}{U} \frac{1}{4 D_{X_1}/U} \exp - \frac{x_2^2 U}{4D_{X_1}} \quad (4.101)$$

式中  $M$  现为线源强度, 即每单位长度单位时间内扩散出的质量。

需要注意式(4.100)和式(4.101)只适用于扩散时间较长, 即  $t \gg 2D/U^2$  的情况, 此时浓度分布趋于稳定, 上述分析的考虑才是正确的。

### 4. 连续源的非定常扩散

以上讨论中连续源的源强是不随时间变化的, 如果连续源的源强是变化的, 原则上仍可用上述坐标变换和叠加法求解。例如在一维扩散情况, 参照静止流体中变源强扩散的式(4.84), 这种情况

的浓度分布式可写为

$$c(x_1, t) = \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{4D_{11}(t-\tau)} \exp - \frac{[x_1 - U(t-\tau)]^2}{4D_{11}(t-\tau)} \quad (4.102)$$

式中  $f(\tau) d\tau = M(\tau)$ , 即在微时段  $d\tau$  放出的扩散质量, 意义和式 (4.84) 中相同。具体积分要给定  $f(\tau)$  函数。实践中多要用数值方法解算。

## 4.10 有边界反射的扩散

以上讨论只限于无限空间中的扩散, 或者边界足够远其影响可以忽略的情况。在实际有限空间中, 在固体边界处扩散质不能通过, 成为扩散方程的边界条件, 不易求严格的解析解。对于简单的直线边界, 有用映像法, 即加对称于边界的虚拟源代替固体边界以满足边界条件来近似求解的方法。现介绍如下。

### 一、固体边界的反射

如图 4.10(a) 所示, 在  $x_2 = -L$  处有一固体直线边界。在原点  $x_2 = 0$  处,  $t = 0$  时加入一个单位强度的瞬时集中源, 可近似认为是均匀面源, 向右可扩散至无穷远; 向左扩散至边界, 不能通过, 通量  $Q$  为零, 按费克定律也就是浓度梯度  $\frac{c}{x_2}$  应为零, 成为扩散应满足的边界条件。求解时, 在  $x_2 = -2L$  处,  $t = 0$  时加入一虚拟的单位强度的瞬时集中源, 以代替边界。虚拟源成为实际源对称于边界的映像。取消边界后, 虚拟源和实际源的扩散强度相等而方向相反的作用仍能保持上述边界条件。按叠加原理, 可认为具有实际边界的单个实际源的解和没有实际边界时实际源加虚拟源的解是等价的, 于是可用下式表示



$$c(x_2, t) = \frac{1}{4Dt} \exp\left[-\frac{x_2^2}{4Dt}\right] + \exp\left[-\frac{(x_2 + 2L)^2}{4Dt}\right] \quad (4.103)$$

图 4.10 考虑边界反射的映像法

可以看到, 单个实际源扩散至边界处的浓度是没有边界时该处浓度的二倍, 故可看作边界对浓度发生全反射的结果。如果边界的性质使得扩散质被部分或全部吸收, 例如粘附在边界上, 则上述解便不适用。但全反射是最不利的情况。

如果实际源在两个平行边界的中间, 一个边界在  $x_2 = -L$  处, 另一个在  $x_2 = +L$  处, 如图 4.10(b) 所示, 求解时就要加两个虚拟源, 其位置分别为  $x_2 = -2L$  和  $x_2 = +2L$  以满足边界条件。但在  $x_2 = -2L$  处的源所产生的浓度场扩散至  $x_2 = +L$  的边界时仍会有一个浓度梯度, 而需要在  $x_2 = +4L$  处的映像虚拟源来抵消这个浓度梯度。如此类推, 要求在  $x_2 = -6L, +8L, \dots$  等处设一系列虚拟源。同样对于  $x_2 = +2L$  的源也要求在  $x_2 = -4L, +6L, -8L, \dots$  等处设一系列虚拟源。理论上要求无数的映像虚拟源才

能完全代替边界反射的作用, 叠加后的浓度分布可由下式表示:

$$c(x_2, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4 \sqrt{Dt}} \exp - \frac{(x_2 + 2nL)^2}{4Dt} \quad (4.104)$$

实际应用时, 求有限项, 如  $n = 0, \pm 1, \pm 2$ , 已可得到较好的近似解。

上面的分析是针对正交于固体边界的横向扩散讨论, 也可说是在静止流体中的情况。如果在纵向( $x_1$  方向) 流体作均匀等速流动, 例如在一顺直河渠中的流动可作这种近似, 两侧边墙对扩散的反射作用仍可按上述考虑, 至于纵向均匀流动的作用, 可按上节变换坐标的方法处理。

## 二、大气中扩散的逆温层反射

近地面大气对流层的温度层结因受许多因素的影响常有较多的变化, 其中最不利于扩散的是出现逆温层。在逆温层中温度随高度增加而增加, 密度则随高度增加而减小, 空气非常稳定, 污染物最难扩散。在进行近地面大气层的扩散分析时, 如果在一般温度较均匀的紊流气层上面有一层逆温层复盖着, 则在上下两层具有紊动强度差别很大的流层之间, 可认为存在一个紊动特征不连续的分界面(实际是很薄的过渡层), 这个不连续面像一个顶盖一样压在下层流体的上面, 抑制着下层物质的向上扩散。有时将这种逆温层下面容易扩散混合的气层称为大气混合层。当计算一个污染源在大气混合层中扩散时, 就要考虑上面逆温层复盖的影响。

分析时可以将逆温层底的分界面看作对扩散起反射作用的界面, 采用前段所述的映像法求浓度场。图 4.11 表示一个连续点源扩散时地面和逆温层底面都起全反射的情况。取坐标原点在地面处,  $H$  为点源的有效高度;  $L$  为逆温层底的高度,  $L > H$ ;  $U$  为均匀风速。设扩散层中紊动是平稳的。因为扩散作用是线性关系, 可以采用叠加方法处理。将扩散作用分解为两部分: 在通过点源的

$x_1x_2$  平面上作连续源二维扩散考虑, 以及在  $x_1x_3$  立面上考虑地面和逆温层的反射作用, 然后将两者的作用叠加起来。

图 4. 11 大气扩散的逆温层反射

按连续源二维扩散的关系式(4. 101)有

$$c_1(x_1, x_2) = \frac{M}{U} \frac{1}{4 D x_1 / U} \exp - \frac{x_2^2 U}{4 D x_1} = \frac{M}{U} \frac{1}{4 D t} \exp - \frac{x_2^2}{4 D t}$$

式中  $M$  为源的强度。结合这种情况的扩散源与地面和逆温层底的相对位置关系, 按上段所述映像法的扩散反射分析, 可得单位源强在  $x_1x_3$  立面上产生的浓度为

$$c_2(x_1x_3) = \frac{1}{4 D t} \sum_{n=0}^{\infty} \exp - \frac{(x_3 - H + 2nL)^2}{4 D t} + \exp - \frac{(x_3 + H + 2nL)^2}{4 D t}$$

两种作用综合结果得出大气混合层中的浓度分布关系式

$$c(x_1, x_2, x_3) = c_1(x_1, x_2) + c_2(x_1, x_3) \\ = \frac{M}{4 U D t} \exp - \frac{x_2^2}{4 D t} + \sum_{n=0}^{\infty} \exp - \frac{(x_3 - H + 2nL)^2}{4 D t}$$

$$+ \exp - \frac{(x_3 + H + 2nL)^2}{4Dt} \quad (4.105)$$

式中  $t = x_1 / U$ 。一般取  $n = 0, \pm 1, \pm 2$  计算已足够精确。求地面浓度时取  $x_3 = 0$  代入即得。

例题 4.2 在室内水槽进行扩散试验, 设水槽右端为封闭, 左端很长。在水槽距右端 10m 的断面 A-A 以平面源方式瞬时投放示踪剂。试计算投放后 10 分钟在距右端 5m 的 B-B 断面及在 A-A 断面左方 10m 的 C-C 断面上的示踪剂浓度。投放量  $M = 1\text{kg}/\text{m}^2$ 。已知扩散系数为  $200\text{cm}^2/\text{s}$ 。计算中要考虑右端边界反射。若不计边界反射, B-B 断面及 C-C 断面浓度又为多少?

[解] 为便于计算, 将时间和长度的单位分别统一用 min 及 m 表示。这样

$$D_t = 200\text{cm}^2/\text{s} = 1.2\text{m}^2/\text{min}$$

(1) 考虑右端边界的反射作用, 浓度计算式为

$$c(x, t) = \frac{M}{4 D_t t} \exp - \frac{x^2}{4D_t t} + \exp - \frac{(x - 2L)^2}{4D_t t}$$

右端边界距投放源  $L = 10\text{m}$

B-B 断面  $x = 5\text{m}$

$$\begin{aligned} c_B &= \frac{1}{4 \times 1.2 \times 10} \exp \frac{-5^2}{4 \times 1.2 \times 10} \\ &+ \exp - \frac{(5 - 2 \times 10)^2}{4 \times 1.2 \times 10} \\ &= 4.91 \times 10^{-2} \text{kg}/\text{m}^3 \end{aligned}$$

C-C 断面  $x = -10\text{m}$

$$\begin{aligned} c_C &= \frac{1}{4 \times 1.2 \times 10} \exp \frac{-(-10)^2}{4 \times 1.2 \times 10} \\ &+ \exp - \frac{(-10 - 2 \times 10)^2}{4 \times 1.2 \times 10} \end{aligned}$$

$$= 1.0 \times 10^{-2} \text{kg/m}^3$$

(2) 若不考虑边界的反射作用, 浓度计算式为

$$c(x, t) = \frac{M}{4 D t} \exp - \frac{x^2}{4 D t}$$

B- B 断面

$$c_B = \frac{1}{4 \times 1.2 \times 10} \exp - \frac{5^2}{4 \times 1.2 \times 10}$$

$$= 4.84 \times 10^{-2} \text{kg/m}^3$$

C- C 断面

$$c_C = \frac{1}{4 \times 1.2 \times 10} \exp - \frac{(-10)^2}{4 \times 1.2 \times 10}$$

$$1.0 \times 10^{-2} \text{kg/m}^3$$

由计算结果可见, 边界反射作用对距边界较近的 B- B 断面有一定的影响, 对距边界较远的 C- C 断面几乎没有影响。

例题 4.3 有一平直均匀河段如图 4.12, 河宽  $W=60\text{m}$ , 水深  $h=3\text{m}$ , 设为均匀流速场, 其流量  $Q_R=140\text{m}^3/\text{s}$ 。污水出口在河中心, 其流量  $Q_p=0.7\text{m}^3/\text{s}$ , 浓度  $c_0=500\text{ppm}$ , 河宽远大于水深, 污染源近似看作连续集中线源, 设横向扩散系数  $D_{ty}$  为  $0.054\text{m}^2/\text{s}$ 。试求: (1) 以  $c(x, b)=0.05c(x, 0)$  来定义污水场宽度  $b(x)$  的表示式; (2) 当  $b=W/2$  时的距离  $x$  值及此处的最大浓度  $c_{\max}$ ; (3) 若污染源在岸边, 将如何变化?

图 4.12 例题 4.3 附图

[解] 已知河宽  $W = 60\text{m}$ , 水深  $h = 3\text{m}$ , 河流流量  $Q_R = 140\text{m}^3/\text{s}$ , 设为均匀紊流, 则流速

$$U = Q_R / A = 140 / (3 \times 60) = 0.78\text{m/s}$$

污水流量  $Q_p = 0.7\text{m}^3/\text{s}$ , 浓度  $c_0 = 500\text{ppm}$

横向扩散系数  $D_{ty} = 0.054\text{m}^2/\text{s}$

看作垂向连续集中线源, 其二维扩散的浓度分布表达式为 (4.101)

$$c(x_1, x_2) = \frac{M}{U \cdot 4 D_{X1} / U} \exp - \frac{x_2^2 U}{4 D_{X1}}$$

现  $x_1 = x, x_2 = y, D = D_{ty}$ , 上式写为

$$c(x, y) = \frac{M}{2 D_{ty} U x} \exp - \frac{U y^2}{4 x D_{ty}} \quad (\text{A})$$

考虑两边边界一次反射, 即分别有两个距边界  $60/2 = 30\text{m}$ , 而距河中心为  $60\text{m}$  的虚拟源叠加作用, 按式(4.104)则浓度分布为

$$c(x, y) = \frac{M}{2 D_{ty} U x} \exp - \frac{U y^2}{4 x D_{ty}} + \exp - \frac{U (y + 60)^2}{4 x D_{ty}} + \exp - \frac{U (y - 60)^2}{4 x D_{ty}} \quad (\text{B})$$

(1) 以  $c(x, b) = 0.05c(x, 0)$  定义污水场宽度  $b(x)$ , 以(B)式代入, 并计算

$$U/4D_{ty} = \frac{0.78}{4 \times 0.054} = 3.6 \quad 1/\text{m}$$

得出  $b(x)$  的隐函数表达式

$$\exp - \frac{3.6}{x} b^2 + \exp - \frac{3.6}{x} (b + 60)^2 + \exp - \frac{3.6}{x} (b - 60)^2 = 0.05 \left[ 1 + 2 \exp - \frac{12960}{x} \right] \quad (\text{C})$$

当  $x$  较小时,  $b$  也小, 上式两边可只取第一项, 上式简化为

$$\exp - \frac{3.6}{x} b^2 = 0.05$$

可得  $b = 0.91 \sqrt{x}$  (D)

即认为实际上反射的影响很小, 可忽略。

(2) 当  $b = W/2 = 30\text{m}$  时,  $b(x)$  隐式(C)右边仍取 0.05; 左边第二项很小可略去, 第三项中  $b = 30$ , 则左边

$2\exp - \frac{3.6}{x} b^2$ , 于是有

$$2\exp - \frac{3.6}{x} b^2 = 0.05$$

由此得  $b = 1.01 \sqrt{x}$  (E)

当  $b = 30\text{m}$ ,  $x = \frac{30^2}{1.01^2} = 882\text{m}$

此  $x$  值仍不算大, 求  $c_{\max}$  仍可简化, 即在(B)式右边只取第一项, 并考虑  $y = 0$  时

$$\begin{aligned} c_{\max} &= \frac{M}{2 D_{ty} U x} \\ &= \frac{Q_p c_0 / h}{2 D_{ty} U x} = \frac{0.7 \times 500 / 3}{2 \times 3.14 \times 0.054 \times 0.78 \times 882} \\ &= 5.40\text{ppm} \end{aligned}$$

(3) 若源在岸边, 要考虑边岸反射, 利用映像法相当于在该处加设一虚拟源, 二源叠加后扩散情况和(1)相同, 但源强为  $2M$ 。容易看出  $b(x)$  的隐函数形式仍相同, 简化式也相同。

但扩散至对岸完全混合时  $b = 60\text{m}$ 。由简化式(E)  $b = 1.01 \sqrt{x}$  计算得到距离  $x = 3530\text{m}$ 。

$$c_{\max} = \frac{2M}{2 D_{ty} U x} = 5.40\text{ppm}$$

和(1)的情况相同。

## 第五章 剪切流中的离散

由于剪切流中流速分布(对于紊流指时均流速分布)不均匀产生含有物质随流散开的作用称为离散或弥散(dispersion)。实际问题中的流体运动多是剪切流动,因此剪切流动中离散的研究就具有重要的实际意义。理论上说来,这个问题用欧拉法可通过对前章层流和紊流相应的移流扩散微分方程求解,在这个方程中不仅包含扩散传输作用,而且其迁移项包含了随流传输作用,即已全面包括了离散作用。前人在这方面曾做过不少工作,但由于问题的难度较大,只有一些较为简单的情况得到解析成果。人们为了简化问题,常将三维剪切流简化为一维流动或二维流动,这样用断面平均参量表达一维流动状况、或用垂线平均参量表达二维流动状况时,对于剪切流中流速分布不均匀所产生物质的离散作用就要专门进行处理,这就是本章讨论的主要内容。这里将着重介绍实际应用最多的一维流动的纵向离散分析。

### 5.1 一维纵向移流离散方程

实际工程中有些问题如管道、渠槽等流动中的扩散可以简化为一维问题处理。这样就要按总流的分析方法采用断面平均流速 $V$ 和断面平均浓度 $C_a$ 来计算,于是就要建立以断面平均值表达的扩散方程。

对于紊流,先写出各流动参量的断面平均值与瞬时值、时均值



和脉动值的关系。令  $u$ 、 $c$  表示断面上任一点的时均流速和时均浓度与其断面平均值之差(偏离值)如图 5.1 所示,可写

$$u = \bar{u} + u = V + u + u \quad (5.1)$$

$$c = \bar{c} + c = C_a + c + c \quad (5.2)$$

图 5.1 一维纵向离散

忽略分子扩散,通过正交于  $x_1$  轴的单位面积在单位时间内的扩散质通量(或浓度通量)的时均值为

$$\begin{aligned} \overline{uc} &= \overline{(V + u + u)(C_a + c + c)} \\ &= (V + u)(C_a + c) + \overline{uc} \end{aligned} \quad (5.3)$$

再对断面 A 平均,并以符号  $\dots$  表示各项的断面平均值,则可写浓度通量的断面平均值为

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \int_A \overline{uc} dA &= (V + u)(C_a + c) + \overline{uc} \\ &= VC_a + Vc + uC_a + uc + \overline{uc} \\ &= VC_a + uc + \overline{uc} \end{aligned} \quad (5.4)$$

因  $\bar{c} = \bar{u} = 0$ ,  $V = V$ ,  $C_a = C_a$

现依据物质守恒定律建立扩散方程。

先看整个流动的物质守恒关系,在图 5.2 的控制空间,流进与

流出的流量差应等于内部体积的变化:

$$\frac{(A dx_1)}{t} dt = - \frac{(AV)}{x_1} dx_1 dt$$

即

$$\frac{A}{t} = - \frac{(AV)}{x_1} \quad (5.5)$$

图 5.2

再看扩散质的守恒关系, 可写

$$\frac{d}{dt} (C_a A dx_1) dt = - \frac{d}{dx_1} \overline{u c} A dx_1 dt$$

以式(5.4)代入得

$$\frac{(C_a A)}{t} = - \frac{d}{dx_1} [A V C_a + A (\overline{u c} + \overline{u c})] \quad (5.6)$$

将式中各项展开:

$$\frac{(C_a A)}{t} = A \frac{C_a}{t} + C_a \frac{A}{t} \quad (5.7)$$

$$- \frac{d}{dx_1} (A V C_a) = - C_a \frac{(AV)}{dx_1} - A V \frac{C_a}{dx_1} \quad (5.8)$$

将(5.7)、(5.8)及(5.5)等式代入式(5.6), 整理后得

$$\frac{C_a}{t} + V \frac{C_a}{dx_1} = - \frac{1}{A} \frac{d}{dx_1} [A (\overline{u c} + \overline{u c})] \quad (5.9)$$

上式中右边两个断面平均项需要模化处理, 使之变为断面平均值的函数。

根据紊动扩散的模式可写

$$\overline{uc} = - D_t \frac{C_a}{X_1} \quad (5.10)$$

$uc$  项是代表断面上流速分布和浓度分布不均匀产生的扩散作用。类比于分子扩散和紊动扩散的模式,对这个移流离散项也表示为

$$uc = - D_L \frac{C_a}{X_1} \quad (5.11)$$

式中  $D_L$  称为纵向移流离散系数 (longitudinal convective dispersion coefficient)。以式(5.10)、(5.11)代入式(5.9)得

$$\frac{C_a}{t} + V \frac{C_a}{X_1} = \frac{1}{A} \frac{1}{X_1} A(D_L + D_t) \frac{C_a}{X_1} \quad (5.12)$$

这就是紊流一维纵向移流离散方程。

如过流断面是常数,上式成为

$$\frac{C_a}{t} + V \frac{C_a}{X_1} = \frac{1}{X_1} (D_L + D_t) \frac{C_a}{X_1} \quad (5.13)$$

也可将  $D_L$  和  $D_t$  合并为一个系数  $K$ ,

$$K = D_L + D_t \quad (5.14)$$

则式(5.13)成为

$$\frac{C_a}{t} + V \frac{C_a}{X_1} = K \frac{C_a}{X_1^2} \quad (5.15)$$

也是一维纵向离散方程的常用形式。 $K$  称为综合扩散系数,也称为混合系数(mixing coefficient)。

对于层流,除没有脉动值项外,其他分析方法相同,只是  $D_t$  应改换为分子扩散系数  $D_m$ ,  $K = D_L + D_m$ , 方程(5.15)仍然适用。

一般情况  $D_L \gg D_t \gg D_m$ , 故常忽略  $D_t$  和  $D_m$ , 以离散为主取  $K = D_L$  计算。

因方程(5.15)的形式和前章的一维扩散方程相同,只是方程中的  $\overline{c}$ 、 $u$ 、 $D_t$  改换为  $C_a$ 、 $V$ 、 $K$ , 所以在数学上一维扩散方程的解可

移用于一维纵向离散方程。

这样, 关键又转为纵向离散系数  $D_L$  或综合扩散系数  $K$  的确定。这问题显然主要和断面上时均流速分布的规律有关, 扩散系数也有影响。因此需要针对不同情况进行理论和实验的研究。

## 5.2 圆管流动中的离散

一维纵向离散的研究是泰勒(1953, 1954)从圆管层流开始的<sup>[14]</sup>, 他为后来的工作打下基础, 因此这里先介绍泰勒的工作。

### 一、圆管层流中的离散

分析工作是从移流扩散方程出发, 对于层流只有分子扩散, 方程为

$$\frac{c}{t} + \frac{(cu)_i}{x_i} = D_m \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_i} \quad (5.16)$$

对圆管流动采用圆柱坐标, 上式成为下列形式:

$$\frac{c}{t} + u(r) \frac{c}{x} = D_m \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{c}{r} \quad (5.17)$$

沿纵向分子扩散很小, 可以忽略, 即式中右边第一项和其他项比较可以略去。

圆管层流的断面上流速分布为

$$u = u_c \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (5.18)$$

式中  $a$  为管的半径,  $u_c$  为管轴线处的最大流速。将式(5.18)代入式(5.17), 并采用无量纲量  $z = r/a$ , 经整理后, 式(5.17)成为

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{c}{z} = \frac{a^2}{D_m} \frac{c}{t} + \frac{a^2}{D_m} u_c (1 - z^2) \frac{c}{x} \quad (5.19)$$

其边界条件为: 当  $z = 1$  时  $\frac{c}{z} = 0$

式(5.19)难以求解。泰勒深入分析现象的物理过程,对方程作了合理的简化。他认为,圆管层流的扩散有两个因素在起作用,一个是断面上纵向流速分布不均匀使扩散质在纵向离散,另一个是径向浓度梯度的存在引起的径向分子扩散(图 5.3)。在扩散初期,纵向离散的作用很强,远大于分子扩散作用。随着扩散质纵向浓度梯度的减小,纵向离散作用不断减弱,而分子径向扩散作用却始终保持着,这是因为纵向离散维持着径向浓度梯度之故。当扩散时间增大到某一程度后,两种作用保持平衡。在这种条件下,方程(5.19)中的 $\frac{c}{t}$ 项可以忽略,方程简化为

$$D_m \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial c}{\partial z} = a^2 u_c (1 - z^2) \frac{\partial c}{\partial x} \quad (5.20)$$

上式可以求解。

图 5.3

分析中还可引入两个时间比尺来衡量上述两种作用的强弱,反映各因素发挥作用所需的时间。径向分子扩散的时间比尺 $t_1$ 应与半径 $a$ 和分子扩散系数 $D_m$ 有关,从量纲关系可得 $t_1 = a^2/D_m$ 。设扩散质扩展距离为 $L$ ,管轴流速为 $u_c$ ,则纵向离散的时间比尺 $t_2 = L/u_c$ 。可见 $t_1$ 是个常量,而 $t_2$ 随 $L$ 的增大而加大, $L$ 则是随扩散时间增加而增大的,当扩散时间很长,使得

$$\frac{L}{u_c} \gg \frac{a^2}{D_m}$$

时,两种作用便会达到平衡。

将固定坐标系  $x$  改成以平均流速  $V$  移动的动坐标系,则

$$x = x - Vt = x - \frac{1}{2}u_c t \quad (5.21)$$

代入式(5.20)得

$$D_m \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial c}{\partial z} = a^2 u_c \left( \frac{1}{2} - z^2 \right) \frac{\partial c}{\partial z} \quad (5.22)$$

再设纵向浓度变率  $\frac{\partial c}{\partial z}$  与  $z$  无关,则上式满足边界条件的一个解为

$$c = c + A z^2 - \frac{1}{2} z^4 \quad (5.23)$$

式中  $c$  为  $z=0$  处(管轴)的浓度;  $A$  为常数。将式(5.23)代入式(5.22)得

$$A = \frac{a^2 u_c}{8D_m} c \quad (5.24)$$

相对于一个以  $V = \frac{u_c}{2}$  的速度下移的平面来说的扩散质流量为

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^r c u - \frac{u_c}{2} \pi r^2 r dr \\ &= 2 a^2 \int_0^1 u_c \left( \frac{1}{2} - z^2 \right) c z dz \end{aligned} \quad (5.25)$$

以式(5.23)、(5.24)代入后可得

$$Q = - \frac{a^4 u_c^2}{192D_m} c \quad (5.26)$$

式中负号表示流量方向与浓度梯度方向相反。式(5.25)还表明,  $c$  必须为随  $z$  而变的变量,即要有径向浓度梯度,  $Q$  才不为零。如  $c$  是常数则  $Q=0$  而没有扩散量了。

设断面平均浓度为  $C_a$ , 可以假定  $\frac{c}{C_a} = \frac{C_a}{C_a}$ , 则式(5.26)成为

$$Q = - \frac{a^4 u_c^2}{192D_m} C_a \quad (5.26a)$$

对单位面积来说, 上式除以面积  $a^2$  得

$$u_c = - \frac{a^2 u_c^2}{192D_m} \frac{C_a}{x} = - \frac{a^2 u_c^2}{192D_m} \frac{C_a}{x} \quad (5.27)$$

如采用费克定律的模式, 引入纵向离散系数  $D_L$

$$u_c = - D_L \frac{C_a}{x} \quad (5.11)$$

则得

$$D_L = \frac{a^2 u_c^2}{192D_m} \quad (5.28)$$

这就是确定圆管层流的纵向离散系数的关系式。从上式可见  $D_L$  和分子扩散系数  $D_m$  有关,  $D_m$  起到降低纵向离散系数的作用。

从物质守恒关系有

$$\frac{Q}{t} = - a^2 \frac{C_a}{t}$$

将式(5.26a)代入得

$$\frac{C_a}{t} = D_L \frac{C_a}{x^2} \quad (5.29)$$

可见相对于一个以  $u_c/2$  速度下移的平面来说, 圆管层流的纵向离散和分子扩散都是由相同形式的微分方程描述, 亦即圆管层流离散的纵向浓度分布也为正态分布。

以上讨论是忽略了纵向分子扩散项  $D_m \frac{C_a}{x^2}$  的, 如把它考虑进去, 则式(5.29)中的  $D_L$  应以综合扩散系数  $K$  代替

$$K = D_L + D_m = \frac{a^2 u_c^2}{192D_m} + D_m \quad (5.30)$$

但实际说明  $\frac{a^2 u_c^2}{192D_m} \ll D_m$ , 忽略  $D_m$  项是合理的。

可以通过实验量测浓度分布来确定  $D_L$  值。则由式(5.28)可以计算  $D_m$  值。所以圆管层流的离散规律还提供一个确定分子扩散系数的途径。

## 二、圆管紊流中的离散

圆管紊流中,在扩散的起始阶段质点的速度  $v(t)$  的变化不是平稳过程,它与质点的起始位置有关。随着时间的推移,历史的关系逐渐不起作用而成为平稳过程。紊流中离散的分析可和层流的离散相比拟而得到解决。

当扩散时间足够长时,可认为纵向离散与径向紊动扩散相平衡,和层流的分析相似,可写出它们之间的关系式。纵向离散是纵向流速在断面上分布不均匀所引起,紊流的流速分布和层流不同;径向扩散在这种情况下是紊动扩散,性质也和层流不同。所以分析上的差别在于紊流的流速分布和紊动扩散系数的确定。

对流速分布泰勒采用下式

$$\frac{\bar{u}(0) - \bar{u}(r)}{v_*} = f(z) \quad (5.31)$$

式中  $v_* = \tau_0 / \rho$ ,  $z = r/a$ ,  $\tau_0$  为管壁切应力。圆管中的切应力与半径  $r$  成线性关系

$$\tau_0 = \frac{r}{a} \tau_a \quad \text{即} \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_a}{\rho}} \frac{r}{a}$$

对于紊动扩散系数  $D_{rr}$  则采用雷诺比拟而有

$$D_{rr}(z) = \frac{m}{\rho} = \frac{\tau_a}{\rho} \frac{r}{a} \quad (5.32)$$

略去推导过程,最后求得纵向离散系数<sup>[14]</sup>

$$D_L = 10.06 a v_* \quad (5.33)$$

纵向紊动扩散的影响可估计如下。紊动产生的扩散质流量为

$$Q = - a^2 D_t \frac{C_a}{x} \quad (5.34)$$

泰勒通过数值积分求得紊动扩散系数

$$D_t = 0.052 a v_* \quad (5.35)$$



可见  $D_t \gg D_L$ 。考虑  $D_t$  后, 综合扩散系数为

$$K = D_L + D_t = 10.1av \quad (5.36)$$

上述分析经实验验证, 符合得较好。至于工程实际管道, 情况较复杂, 和上述系数略有不同, 需通过实验修正。

### 5.3 宽矩形断面明槽流动中的离散

明槽流动中的离散分析是爱尔德(Elder, 1959)应用泰勒的方法先提出的<sup>[15]</sup>。他的工作只针对宽矩形明槽的均匀流动(等水深流动), 因而是个二维问题。现要转换为一维纵向离散问题处理。

爱尔德从普遍紊流扩散方程(4.52)出发, 忽略分子扩散, 并令发生项  $F_c = 0$ , 同时采用

$$-\overline{cu_1} = D_{t_1} \frac{\bar{c}}{X_1} \quad -\overline{cu_2} = D_{t_2} \frac{\bar{c}}{X_2} \quad -\overline{cu_3} = D_{t_3} \frac{\bar{c}}{X_3}$$

考虑到  $\bar{u}_2 = \bar{u}_3 = 0$ , 代入后得

$$\begin{aligned} \frac{\bar{c}}{t} + u_1 \frac{\bar{c}}{X_1} &= \frac{Dc}{Dt} \\ &= \frac{\bar{c}}{X_1} D_{t_1} \frac{\bar{c}}{X_2} + \frac{\bar{c}}{X_2} D_{t_2} \frac{\bar{c}}{X_2} + \frac{\bar{c}}{X_3} D_{t_3} \frac{\bar{c}}{X_3} \end{aligned} \quad (5.37)$$

为简便计, 上式中各项顶上的时均符号均省去, 以下也如此。

设横向没有扩散  $\frac{c}{X_3} = 0$ , 纵向扩散项  $D_{t_1} \frac{c}{X_1}$  与移流项

$u_1 \frac{c}{X_1}$ , 因而可以忽略, 即只剩垂向扩散项, 上式成为

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{c}{X_2} D_{t_2} \frac{c}{X_2} \quad (5.38)$$

表示纵向时均流速为断面上平均流速  $v$  与流速偏离值  $u$  之和

$$u_1 = V + u \quad (5.39)$$

并改用移动坐标系  $x_1 = x_1 - Vt$ , 则有

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{c}{t} + V \frac{c}{x_1} + u \frac{c}{x_2} \quad (5.40)$$

近似取

$$\frac{c}{t} + V \frac{c}{x_1} = 0$$

则式(5.38)成为

$$-\frac{D}{Dx_2} D_{t_2} \frac{c}{x_2} = u \frac{c}{x_2} \quad (5.41)$$

上式结果说明垂向的扩散和纵向离散相平衡(图 5.4)。这和泰勒对圆管流动中离散所作的假定相同。

图 5.4 宽矩形断面明槽流中的离散<sup>[9]</sup>

引入无量纲垂向坐标  $X_2 = \frac{x_2}{h}$ ,  $h$  为水深, 式(5.41)成为

$$-\frac{D}{DX_2} D_{t_2} \frac{c}{X_2} = h^2 u \frac{c}{X_2} \quad (5.42)$$

表示

$$c = C_a + c \quad (5.43)$$

同时认为  $\frac{C_a}{h} = \text{const}$ , 从实验得知  $\frac{c}{h} = 0$ , 又考虑到  $\frac{C_a}{h} = 0$ , 将这些关系代入式(5.42)得

$$- D_{t_2} \frac{c}{h} = h^2 \frac{C_a}{u} \quad (5.44)$$

沿深度积分得

$$c = h^2 \frac{C_a}{D_{t_2}} \int_0^d u \, d \quad (5.45)$$

采用费克定律的模式,引入纵向离散系数  $D_L$ , 扩散质纵向流量

$$Q = \int_A u c dA = - D_L A \frac{C_a}{h} \quad (5.46)$$

以式(5.45)代入后求得

$$D_L = - h^2 \int_0^d u \, d \int_0^d \frac{1}{D_{t_2}} u \, d \quad (5.47)$$

这就是求二维明槽流动纵向离散系数的关系式。具体数值取决于时均流速在垂向的分布规律和垂向紊动扩散系数  $D_{t_2}$  的值。

爱尔德对明槽紊流采用对数流速分布

$$u = u_c + v^* \frac{1}{\kappa} \ln(1 - \frac{y}{h}) \quad (5.48)$$

式中  $\kappa$  为卡门常数,  $v^*$  为摩阻流速, 在明槽中

$$v^* = \frac{\tau_0}{\rho} = \sqrt{g R i}$$

$R$  为水力半径, 在这种情况下  $R = h$ ,  $i$  为槽底纵坡。并采用雷诺比拟

$$D_{t_2} = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{h}{- du/dx_2} = h v^* (1 - \frac{y}{h}) \quad (5.49)$$

将式(5.48)、(5.49)代入式(5.47)得到

$$\frac{D_L}{h v^*} = \int_0^d \frac{1}{(1 - \frac{y}{h})^2} [\ln(1 - \frac{y}{h})]^2 d \quad (5.50)$$

取  $\kappa = 0.41$  计算得

$$D_L = 5.86 h v^* \quad (5.51)$$

以上结果是在忽略纵向扩散项  $\frac{D_{t1}}{x_1} \frac{c}{x_1}$  的情况下得出的。如按各向同性紊动处理, 取  $D_{t1} = D_{t2} = D_t$ , 这部分的扩散量为

$$h \int_0^1 D_{t2} \frac{c}{d} = D_t h \frac{c}{d}$$

$D_t$  为紊动的纵向扩散系数。以式(5.49)代入, 求得

$$D_t / hv^* = \int_0^1 (1 - \eta) d\eta = 1/6 = 0.068 \quad (5.52)$$

故考虑  $D_t$  在内, 综合纵向扩散系数  $K$  为

$$K = D_L + D_t = 5.93v^* h \quad (5.53)$$

以上是理论分析的结果。据爱尔德本人实验这数值也偏低。主要原因是假定  $D_{t1} = D_{t2}$ , 实际可能  $D_{t1} > D_{t2}$ 。实验得  $D_t = 0.23hv^*$ , 则  $K = 6.1hv^*$  和实验值  $6.3hv^*$  较接近, 但爱尔德实验的雷诺数较低, 也可能影响结果的精确度。

## 5.4 紊流边界层中的离散

粗糙表面上紊流边界层的离散与地面附近大气中污染物质的离散分析关系密切, 实用意义较大。但和前面讨论的管、槽中均匀流动的离散不同, 在管、槽均匀流中质点速度  $v_i(t)$  是平稳随机过程, 可用前述的理论方法分析。在边界层中其上边界是和层外非紊动的自由流体接触, 因层内紊动流体的作用将非紊动流体卷吸到紊流区内, 边界不断向外扩展, 不是均匀紊流, 质点速度不是时间的平稳随机函数, 质点位置的概率分布也不是正态分布, 因此不能任意地用费克型模式来表示扩散。

巴切勒(Batchelor, G. K.) (1957)<sup>[16]</sup> 提出一个解决这种不属于平稳随机过程的紊流中离散问题的途径: 利用紊流结构在统计上的自保性, 将质点速度变换成为一个平稳的随机函数。所谓自保性就是紊动虽然从一个断面到另一个断面不断变化, 但其结构仍

保持同样的形式,各断面不同只是长度(距离)和速度具有不同的比尺而已。也即是通常说的具有相似性。

具体到分析粗糙紊流边界层中的离散时,考虑流动为等应力层,切应力  $\tau = \tau_0$ ,  $\tau_0$  为边界阻力,流速分布为

$$u(z) = v_* f \frac{z}{z_0} = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}$$

$z$  为边界以上高度,  $z_0$  为边界粗糙高度(如为地面上大气边界层,无树木房屋时  $z_0$  的量级是几个 cm)。巴切勒(1964)提出两个假设:

(1) 从边界  $z = 0$  上固定点源排放的标志物质,其质点速度的统计特性只决定于  $v_*$  和时间  $t$ ,  $v_*$  为摩阻流速。粗糙高度  $z_0$  只影响时均速度的坐标系而不影响紊动结构。

(2) 对于从高度为  $h$  的点源排放的质点,在短时间内其运动会受到  $h$  的影响,但经过足够长的时间  $t_1$  以后,质点速度的统计特性将不再受  $h$  的影响。且只要  $t \gg t_1$ , 其统计特性和从  $h = 0$  的点源在  $-t_1$  时间排放的质点的统计特性可假设相同。 $t_1$  与  $h/v_*$  属同一量级,后者即高度  $h$  的紊动时间比尺。

据此假说,提出从高度  $h$  排放的质点在时间  $t$  以后的纵向位移  $\bar{X}$  的二阶导数按量纲分析为

$$\frac{d^2 \bar{X}}{dt^2} = \frac{a v_*}{t + t_1}$$

式中  $a$  为无量纲常数。积分得

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = a v_* \ln \frac{t + t_1}{t_0 + t_1} \quad (5.54)$$

式中  $t_0$  为时间常数,相当于质点纵向速度  $u = 0$  的时刻。

在垂向,认为任何时刻垂向位移  $\bar{Z}$  的变率  $\frac{d\bar{Z}}{dt}$  都是有限的,则

$$\frac{d^2 \bar{Z}}{dt^2} = 0 \quad \frac{d\bar{Z}}{dt} = \text{const}$$

由量纲考虑设

$$\frac{dZ}{dt} = bv^* \quad (5.55)$$

积分得  $Z = bv^* (t + t_2)$  (5.56)

式中  $b$  为另一个无量纲常数;  $t_2$  为另一个时间常数。

为确定各式中的常数, 认为平均高度为  $Z$  的质点的平均速度  $dX/dt$  应是流场中高度为  $kZ$  处的流速,  $k$  为比例常数, 即

$$\frac{dX}{dt} = [u(z)]_{z=kZ} = \frac{v^*}{Z_0} \ln \frac{kZ}{Z_0} \quad (5.57)$$

以式(5.54)、(5.56)代入得

$$av^* \ln \frac{t + t_1}{t_0 + t_1} = \frac{v^*}{Z_0} \ln \frac{kbv^* (t + t_2)}{Z_0}$$

可见只有在下列条件下此式才能成立:

$$a = \frac{1}{k} \quad t_1 = t_2 \quad (5.58)$$

所以式(5.56)、(5.54)可改写为

$$Z = bv^* (t + t_1) \quad (5.59)$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{v^*}{Z_0} \ln \frac{kbv^* (t + t_1)}{Z_0} = \frac{v^*}{Z_0} \ln \frac{kZ}{Z_0} \quad (5.60)$$

从上两式可得

$$\frac{dX}{dZ} = \frac{1}{b} \ln \frac{kZ}{Z_0} \quad (5.61)$$

积分得

$$X = \frac{1}{b} (Z \ln \frac{kZ}{Z_0} - Z + A) \quad (5.62)$$

此方程表示质点以平均速度运行的轨迹。 $A$  为一个常数, 可由边界条件确定如下: 因  $h/v^*$  为高度  $h$  的紊动时间比尺, 当  $Z = h$  时,  $X$

$u(h) \times \frac{h}{v^*} = \frac{h}{Z_0} \ln \frac{h}{Z_0}$ , 代入式(5.62), 可粗略得出

$$A = h(b-1) \ln \frac{h}{z_0} + 1 - \ln k \quad (5.63)$$

至于常数  $b$ , 按 Cermak(1963) 认为  $b = 0.1$  符合实测资料。常数  $k$  略小于 1<sup>[17]</sup>。

当  $h = 0$  时,  $A = 0$ 。由式(5.62)得

$$b X = Z \ln \frac{kZ}{z_0} - Z \quad (5.64)$$

即点源在地面时质点的轨迹。

为确定污染物质在空间的浓度分布, 考虑一个质点从源点经过时间  $t$  扩散到某一个给定点  $(x, y, z)$  的概率就代表该点的扩散质浓度的统计平均值。由量纲分析可以假设下列关系式成立:

$$F \frac{cZ^3}{M}, \frac{x-X}{Z}, \frac{y}{Z}, \frac{z-Z}{Z} = 0$$

$$c(x, y, z, t) = \frac{M}{Z^3} f\left(\frac{x-X}{Z}, \frac{y}{Z}, \frac{z-Z}{Z}\right) \quad (5.65)$$

式中  $M$  为点源的强度。对于定常的连续点源有

$$c(x, y, z) = M \int_0^{\infty} \frac{1}{Z^3} f\left(\frac{x-X}{Z}, \frac{y}{Z}, \frac{z-Z}{Z}\right) dt \quad (5.66)$$

经过一些变换积分变量处理, 引入式(5.61), 考虑在中心线上  $y = 0, z = 0$  的地面浓度, 并令  $x = X$ , 巴切勒得到当  $x = X$  时浓度分布的关系式(取  $k = 1$ )

$$c(x, 0, 0) = \frac{M}{v \cdot X^2} \ln \frac{Z}{z_0} \quad (5.67)$$

对于其他有自由边界的紊流, 如射流、混合层和尾流, 同样因质点速度不是时间的平稳随机函数, 习惯都采用紊流结构在统计上的自保性假定, 即相似性假定来分析。因射流在环境问题中应用很多, 将集中在第六章中讨论。

## 5.5 非定常剪切流中的离散

上面论述的离散分析都是设流动是定常的。实际的流动大都是非定常的。当流动变化较缓慢时可按定常流处理,分时段按定常流作离散分析。但有许多情况,例如有潮汐的河口段和港湾,就常要进行非定常流的离散分析。一般实际的非定常剪切流中的离散,多难以求得严格的解析解,而要用近似的数值计算。这里为了说明一些基本概念和解决问题的途径,取一个理想的简单情况讨论。

因为一个非定常流动常可看作对定常流动加上一个周期性的波动而得,现设在平行平板间流动的流速分布是

$$u_1 = u_0 \frac{x_2}{h} \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (5.68)$$

即在线性分布  $u_0 \frac{x_2}{h}$  上加正弦波动,  $h$  为两板间距,  $T$  为摆动周期,如图 5.5 所示。

图 5.5 平行平板间的非定常剪切流<sup>[10]</sup>

先看定常流情况,流速分布为

$$u_1 = u_0 \frac{x_2}{h} \quad (5.69)$$



设在平板间加入标志物质, 经过一段较长时间(按 Chatwin 分析其量级为  $h^2/D$ ), 浓度分布成为稳定。因属二维情况, 可按式 (5.44) 分析, 注意到在这种情况下  $\frac{C_a}{X_1} = \frac{C_a}{X_1}$ , 写为

$$\frac{1}{X_2} D_{t_2} \frac{c}{X_2} = u \frac{C_a}{X_1} \quad (5.70)$$

沿垂线积分二次可得浓度偏离值的垂向分布:

$$\begin{aligned} c(x_2) &= \frac{C_a}{X_1} \int_{-h/2}^{x_2} \frac{1}{D_{t_2}} \int_{-h/2}^{x_2} \frac{u_0 X_2}{h} dx_2 dx_2 + c - \frac{h}{2} \\ &= \frac{1}{D_{t_2}} \frac{C_a}{X_1} \frac{u_0}{2h} \frac{x_2^3}{3} - \frac{h^2 x_2}{4} - \frac{h^3}{12} + c - \frac{h}{2} \quad (5.71) \end{aligned}$$

$c - \frac{h}{2}$  值可由  $c$  的平均值应为零的条件求得, 也可不必求, 因在下面求离散系数积分中可消去。按式(5.46)求得纵向离散系数为

$$\begin{aligned} D_L &= - \frac{1}{h} \frac{1}{C_a/X_1} \int_{-h/2}^{+h/2} u c dx_2 \\ &= - \frac{u_0}{2h^2 D_{t_2}} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{u_0 X_2}{h} \frac{x_2^3}{3} - \frac{h^2 x_2}{4} - \frac{h^3}{12} + c - \frac{h}{2} dx_2 \\ &= \frac{u_0^2 h^2}{120 D_{t_2}} \quad (5.72) \end{aligned}$$

如果流动的方向相反, 即

$$u_1 = - u_0 \frac{X_2}{h} \quad (5.73)$$

则浓度分布也相反, 即

$$\begin{aligned} c(x_2) &= - \frac{1}{D_{t_2}} \frac{C_a}{X_1} \frac{u_0}{2h} \frac{x_2^3}{3} - \frac{h^2 x_2}{4} - \frac{h^3}{12} + c - \frac{h}{2} \\ & \quad (5.74) \end{aligned}$$

但纵向离散系数不变, 仍为式(5.72)。

现讨论非定常流情况, 流速分布是在式(5.69)和式(5.73)之间周期性地变化, 周期为  $T$ 。则浓度分布也将随之改变, 浓度分布

完全适应新的速度分布所需的时间近似为  $T_c = h^2/D_{t_2}$ 。考虑两种极限情况,一种是周期很短  $T_n \ll T_c$ ,速度变化较快,浓度分布还来不及适应新的速度分布,速度分布又转到相反方向了,这样浓度分布就只是在平均浓度分布附近摆动,则  $c \approx 0$ ,因而离散系数  $D_L \approx 0$ 。另一种情况是周期很长  $T_m \gg T_c$ ,速度变化较慢,在每个方向都有足够时间使浓度分布适应速度分布的变化,在多数时间的浓度偏离值分布符合定常情况的分布,所以可按定常情况估算其离散系数。

要定量分析式(5.68)的非定常流动的离散,可将式(5.70)改写为

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} D_{t_2} \frac{\partial c}{\partial x_2} \quad (5.75)$$

即同样采用了泰勒对离散分布的假定,但保留了  $c$  的非定常项。按式(5.68),垂线上平均流速  $V = 0$ ,  $u = u_1 = \frac{u_0 x_2}{h} \sin \frac{2t}{T}$ 。故有

$$\frac{\partial c}{\partial t} - D_{t_2} \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} = - \frac{u_0 x_2}{h} \frac{\partial c}{\partial x_1} \sin \frac{2t}{T} \quad (5.76)$$

因在边界上无法向输移,故边界条件为  $x_2 = \pm h/2$  处  $\frac{\partial c}{\partial x_2} = 0$ ; 令起始条件为  $c(x_2, 0) = 0$ , 这样不会失去普遍性。最后求得方程(5.76)的解为

$$c = \frac{2u_0 h^2}{3D_{t_2}} \frac{T}{T_c} \frac{C_a}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin(2n-1) \frac{x_2}{h} \times \frac{1}{2} (2n-1)^2 \frac{T}{T_c} + 1^{-1/2} \sin \frac{2t}{T} + \dots_{2n-1} \quad (5.77)$$

$$\text{式中 } \dots_{2n-1} = \sin^{-1} - \frac{1}{2} (2n-1)^2 \frac{T}{T_c} + 1^{-1/2} \quad (5.78)$$

而一维纵向离散系数的波动周期平均值为

$$\begin{aligned}
 D_L &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{u_c}{h} \frac{dx_2}{x_1} - \frac{C_a}{x_1} \right] dt \\
 &= \frac{u_0^2 h^2}{4 D_{t_2}} \frac{T}{T_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left[ \frac{1}{2} (2n-1)^2 \frac{T}{T_c} + 1 \right]^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{5.79}$$

$$\text{当 } T \gg T_c \text{ 时 } D_L \approx 0$$

$$\text{当 } T \ll T_c \text{ 时 } D_L = \frac{1}{240} \frac{u_0^2 h^2}{D_{t_2}} \tag{5.80}$$

后者可以看作是一系列定常流动的叠加,  $D_L$  可看作是定常状态下的  $D_L$  的周期平均值。  $D_L$  与波动周期的关系式(5.79) 绘出如图 5.6 所示。

图 5.6 离散系数  $D_L$  与波动周期关系<sup>[10]</sup>

现再进一步设非定常流是由一个定常分量和一个波动分量组

成如下式:

$$u(x_2) = u_1(x_2) \sin \frac{2t}{T} + u_2(x_2) \quad (5.81)$$

例如  $u_1 = u_2 = u_0 \frac{x_2}{h}$ ,  $u(x_2)$  是一个脉动流动。容易证明各分量的离散的叠加得到组合的离散。

令  $c_1$  是  $\frac{c_1}{t} + u_1 \sin \frac{2t}{T} \frac{C_a}{X_1} = D_{t_2} \frac{c_1^2}{X_2^2}$  的解,

$c_2$  是  $\frac{c_2}{t} + u_2 \frac{C_a}{X_1} = D_{t_2} \frac{c_2^2}{X_2^2}$  的解,

则  $c = c_1 + c_2$  是  $\frac{c}{t} + u \frac{C_a}{X_1} = D_{t_2} \frac{c^2}{X_2^2}$  的解。

纵向离散系数的周期平均值为

$$D_L = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{h C_a / X_1} \left[ u_1 \sin \frac{2t}{T} + u_2 (c_1 + c_2) \right] dx_2 dt \quad (5.82)$$

因  $c_1$  是正弦变化的, 则上式中交叉乘积项  $u_2 c_1$  及  $u_1 \sin \frac{2t}{T} \cdot c_2$  的周期积分等于零, 所以有

$$\begin{aligned} D_L &= \frac{1}{h C_a / X_1} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ u_1 c_1 \sin \frac{2t}{T} dx_2 dt + u_2 c_2 dx_2 \right] \\ &= D_{L_1} + D_{L_2} \end{aligned} \quad (5.83)$$

式中  $D_{L_1}$  是波动分量的离散系数周期平均值,  $D_{L_2}$  是定常分量的离散系数。当然  $D_{L_1}$  受  $T/T_c$  值影响, 而  $D_{L_2}$  则不受影响。

以上讨论的是费希尔在文献[10]中所介绍的针对断面上流速为直线分布的分析结果。最近卞振举应用浓度矩法(此法的要点见下面 5.7 节)求得针对断面上流速为任意线型分布的纵向离散系数的表达式<sup>[51]</sup>, 并计算了对数流速分布情况下, 不同无量纲回荡周期  $T/T_c$  时, 往复流的离散系数随时间的变化过程。并发现当

$T/T_c = 1$  时, 在流速方向反转后的一段时间内出现离散系数为负值的现象, 此时污染云团发生收缩, 这个现象得到室内水槽中往复流离散实验的证实。故实际非定常往复流中离散现象甚为复杂, 仍有待继续深入研究。

## 5.6 平面二维流动中的离散

以上讨论的流动, 其速度矢量都是沿  $x_1$  一个方向, 速度的大小则在  $x_2$  (垂线) 方向上变化。在许多环境问题如港湾、湖泊中的流动, 常按平面二维流动分析, 速度矢量一般有两个分量, 在本节表示为  $\bar{u}_x$  和  $\bar{u}_y$ 。因为沿水深 ( $z$  方向) 这两个分量都可能变化, 故常用深度的平均值  $V_x$  和  $V_y$  计算:

$$V_x = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u}_x dz \quad V_y = \frac{1}{h} \int_0^h \bar{u}_y dz \quad (5.84)$$

对于紊流有下列关系

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x = V_x + \bar{u}_x + u'_x \quad (5.85)$$

$$u_y = \bar{u}_y + u'_y = V_y + \bar{u}_y + u'_y \quad (5.86)$$

$$c = \bar{c} + c' = C_{az} + \bar{c} + c' \quad (5.87)$$

式中  $C_{az}$  表示深度 ( $z$  方向) 的平均浓度, 其他符号的意义和前面相同。

类似于 5.1 节中推导一维纵向移流离散方程

$$\frac{C_a}{t} + V \frac{C_a}{x_1} = \frac{1}{A} \frac{1}{x_1} A (D_L + D_T) \frac{C_a}{x_1}$$

的方法, 并注意引入下列两个方向的离散模化关系:

$$u_x c_z = - D_x \frac{C_{az}}{x} \quad (5.88)$$

$$u_y c_z = - D_y \frac{C_{az}}{y} \quad (5.89)$$

式中左边表示由于在深度(z方向)上速度分量分布的不均匀所产生的离散作用,是一个深度上的平均离散通量。 $D_x$ 和 $D_y$ 分别为纵向和横向的离散系数。最后可导出平面二维流动的离散方程如下:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{az}}{t} + \frac{1}{h} C_{az} \frac{h}{t} + V_x \frac{C_{az}}{x} + V_y \frac{C_a}{y} \\ & = \frac{1}{h} \frac{h}{x} hK_x \frac{C_{az}}{x} + \frac{h}{y} hK_y \frac{C_{az}}{y} \end{aligned} \quad (5.90)$$

当流动为定常时,  $\frac{h}{t} = 0$ , 上式成为

$$\begin{aligned} & \frac{C_{az}}{t} + V_x \frac{C_{az}}{x} + V_y \frac{C_{az}}{y} \\ & = \frac{1}{h} \frac{h}{x} hK_x \frac{C_{az}}{x} + \frac{h}{y} hK_y \frac{C_{az}}{y} \end{aligned} \quad (5.91)$$

式中  $h$  为深度;  
纵向混合系数

$$K_x = - \frac{\overline{u_x C_{az}} + \overline{u_x C_{az}}}{C_{az}/x} \quad D_x + D_{txz} \quad (5.92)$$

横向混合系数

$$K_y = - \frac{\overline{u_y C_{az}} + \overline{u_y C_{az}}}{C_{az}/y} \quad D_y + D_{tyz} \quad (5.93)$$

式中符号  $\overline{\dots}_z$  表示  $z$  方向(深度上)的平均。显然混合系数  $K_x$  和  $K_y$  是包括了许多影响因素的经验系数,一般需要由实测资料研究确定。

## 5.7 浓度矩法

前面各节分析流体中含有物质的扩散输移过程是用含有物质

---

式(5.90)可由三维扩散方程将各项对深度取平均而较严格地导出。

浓度在时间和空间上的分布来描述的, 通过解移流扩散方程直接求得浓度分布函数, 主要是采用了泰勒的简化假定。阿里斯(Aris, R.)(1956)提出了另外一个方法, 可称为浓度矩法<sup>[18]</sup>, 这个方法研究浓度分布函数的数字特征来描述扩散输移过程。阿里斯首先用这个方法分析圆管中的离散问题, 后来有人应用来解决其他问题而得到一定的发展。下面对这个方法的要点作一简要介绍。

首先定义浓度分布函数  $c$  的  $p$  阶浓度矩  $c_p$  为

$$c_p = \int c^p dV \quad (5.94)$$

$c_p$  也就是浓度分布对原点的  $p$  阶原点矩。各阶统计矩的物理意义及有关的数字特征如数学期望、方差等已在第二章 2.5 节中介绍过, 在第四章 4.8 节也已提过浓度分布的各阶矩, 这里不再重复。

然后按问题性质, 从相应的(三维、一维...) 移流扩散方程出发, 对方程中的每项进行积分  $\int (\quad)^p dV$  处理, 即取其  $p$  阶矩来建立浓度矩方程, 结合边界条件求解。一般只要得出几个阶的浓度矩即可分析浓度分布的特征。

现举平行平板间的层流中离散为例说明如下。以断面平均流速移动的坐标系的扩散方程为

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = D_m \left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2} \right) \quad (5.95)$$

逐项取  $\int (\quad)^p dV$ , 并设流道无限长, 当  $x = \pm \infty$  时  $c = 0, \frac{\partial c}{\partial x} = 0$ , 运算得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int c^p dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int c^p dV = \frac{\partial}{\partial t} c_p \\ u \frac{\partial}{\partial x} \int c^p dV &= u \int \frac{\partial}{\partial x} c^p dV = u \int \frac{\partial (c^p)}{\partial x} dV \\ &= u \int \frac{\partial c^p}{\partial x} dV = u \int p c^{p-1} \frac{\partial c}{\partial x} dV = u p \int c^{p-1} \frac{\partial c}{\partial x} dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^p D_m \frac{c}{x_1^2} d &= D_m \frac{d}{dt} \left( \frac{c}{x_1^2} \right) \\
&= D_m \left( -\frac{2c}{x_1^3} \frac{dx_1}{dt} - \frac{1}{x_1^2} \frac{dc}{dt} \right) \\
&= D_m \left( -\frac{2c}{x_1^3} v - \frac{1}{x_1^2} \frac{dc}{dt} \right) \\
&= 0 - 0 + D_m p (p-1) \frac{c}{x_1^2} d = D_m p (p-1) c_{p-2} \\
{}^p D_m \frac{c}{x_2^2} d &= \frac{d}{dt} \left( \frac{c}{x_2^2} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{c}{x_2^2} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{c_p}{x_2} \right)
\end{aligned}$$

代入式(5.95)成为

$$\frac{d}{dt} c_{p-1} - u p c_{p-1} = D_m p (p-1) c_{p-2} + \frac{d}{dt} \left( \frac{c_p}{x_2} \right) \quad (5.96)$$

边界条件是: 当  $x_2 = 0$  和  $x_2 = h$  时  $D_m \frac{c}{x_2} = 0$ , 即在平板面没有垂向扩散, 则

$$\begin{aligned}
D_m \frac{c_p}{x_2} &= D_m \frac{d}{dt} \left( \frac{c_p}{x_2} \right) \\
&= D_m \frac{d}{dt} \left( \frac{c_p}{x_2} \right) = 0 \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{c_p}{x_2} \right) &= 0
\end{aligned}$$

对式(5.96)取断面平均值后得

$$\frac{d}{dt} c_p - p u c_{p-1} = p(p-1) D_m c_{p-2} \quad (5.97)$$

式(5.96)和(5.97)就是浓度矩方程。通过取  $p = 0, 1, 2$  列出方程即可求得  $t$  时的解。结果如下:



方 程	t 时的推论
$\frac{d}{dt} c_0 = 0$	$c_0 = \text{const}$ 含有物总质量守恒。
$\frac{d}{dt} c_0 = \frac{D_m}{x_2} \frac{c_0}{x_2}$	$c_0 = \text{const}$ 断面上浓度均匀分布。
$\frac{d}{dt} c_1 = u c_0$	$c_1 = \text{const}$
$\frac{d}{dt} c_1 - u c_0 = \frac{D_m}{x_2} \frac{c_1}{x_2}$	此方程类似于方程(5.75), $c_0$ 相应于 $C_a / x_1$ 。
$\frac{d}{dt} c_2 = 2 u c_1 + 2 D_m \frac{c_0}{x_2}$	相应于 $\frac{d^2}{dt^2} = 2D_L + 2D_m$ , 分子扩散与剪切离散可叠加。 $c_2$ 随时间线性增加。

解浓度矩方程从原则上说, 可以取  $p = 0, 1, 2, 3, \dots$  以至  $p$  的任何值, 浓度分布可以求解至任何精确度。所以这个方法比泰勒的分析在这点上更具普遍性。但实际上只取至二阶矩已足够确定浓度分布的特性。

## 5.8 天然河流中的离散

天然河流中污染物质的离散是实际工作中常常遇到的问题, 由于天然河流的流动受自然条件影响较大, 问题较复杂, 限于篇幅这里不可能详细讨论, 只作简要介绍以作为本章的结尾。

### 一、河流中混合的几个阶段

污水泄入河流后, 与河水的混合一般分为三个阶段。第一阶段在离开排口后以射流的方式和周围水体掺混而扩散。当射流的动量或浮力作用逐渐消失以后, 进入第二阶段, 如尚未扩展至河流的全断面, 则将随河水运动, 并由于紊动而继续横向扩散。当扩展至

全河宽,并且全断面完全混合时进入第三阶段,以后沿纵向继续随流离散,可称为离散段。以前可称为初始段。

第一阶段称为近区,其扩散混合过程一般是三维问题,将在第六章讨论。第二、第三阶段为远区。第二阶段严格说来也是三维问题,但在天然河流,水深常远小于河宽,垂向扩散会很快完成,主要是横向扩散,因此常在垂向取平均值而按纵向、横向二维问题处理。在第三阶段则按一维纵向离散分析。

所谓达到全断面混合的含义尚无统一的规定,有以瞬时污染源的离散云团的方差达到线性增长或者浓度变化服从于离散系数为常数的一维纵向离散方程作为进入离散段的标志的。离散段的起始断面至排污口的距离目前尚难以求得解析解。实用上有许多近似的确定方法。对远区的分析有将泄流看作一个污染源来处理的。费希尔(Fischer, H. B.)按有限边界的均匀流中污染源扩散的计算方法,并以岸边最小浓度与断面最大浓度之差在5%以内为达到完全混合的标准,提出估算顺直河流中达到全断面完全混合的距离的关系式<sup>[10]</sup>如下:

对于在河流中心排污

$$L = 0.1VW^2 / D_{tt} \quad (5.98)$$

对于在河岸排污

$$L = 0.4VW^2 / D_{tt} \quad (5.99)$$

式中  $L$  为达到完全混合的断面至排污源的距离,  $V$  为河流的平均流速,  $W$  为河宽,  $D_{tt}$  为横向紊动扩散系数。

## 二、河流的紊动扩散系数

从以上的讨论可见,河流中污染物质的扩散输移分析需要知道各个方向的紊动扩散系数值。分别讨论如下。

### 1. 垂向扩散系数

垂向扩散系数的研究主要是5.3节中介绍的二维明槽流中的

扩散,采用雷诺比拟及对数流速分布得到的垂向扩散系数表达式

$$D_{tv} = D_{t2} = hv^* (1 - \frac{z}{h}) \quad (5.100)$$

式中  $\frac{x_2}{h} = \frac{z}{h}$ 。对水深平均并取  $\bar{v} = 0.4$ , 得出下面有用的结果:

$$D_{tv} = 0.067hv^* \quad (5.101)$$

对垂向掺混来说,经试验证明雷诺比拟还是可用的。我国河海大学环境水利研究所根据国内一些天然河流的研究说明,对于内陆河川式(5.101)是适用的;对于潮汐河流则涨潮与退潮的垂向扩散系数有差别,对此进行了有意义的探索<sup>[40]</sup>。

## 2. 横向扩散系数

天然河流的纵横剖面变化较大,且常很不规则,岸边还会有各种建筑物的影响,这些都使得流动在横向分布不均匀,引起横向的扩散。河宽一般又远大于水深,横向扩散不会像垂向扩散那样很快完成,因此就更为重要。由于影响因素复杂,目前还不可能和垂向扩散一样通过流速分布来建立横向扩散系数的关系式,而只能按实验和观测资料来确定这个系数值的范围。

设仍用垂向扩散系数表达式的形式来表示横向扩散系数,即

$$D_{tt} = \alpha_t hv^* \quad (5.102)$$

$\alpha_t$ 为无量纲系数。对于顺直的明槽,费希尔收集70多个实验资料发现,除灌溉渠道  $\alpha_t$ 值为0.24-0.25外,几乎所有情况其值都在0.1-0.2的范围<sup>[10]</sup>,因而提出取用其平均值的估算式:

$$D_{tt} = 0.15hv^* \quad (5.103)$$

对于弯曲和各种不规则性的河流,虽然也有一些研究工作,但尚不很充分,按已有资料可以看到天然河流的不规则性使横向扩散系数增大,  $\alpha_t$ 值多大于0.4。如河流弯曲较缓,边岸的不规则程度属中等,  $\alpha_t$ 值一般在0.4-0.8的范围。实用上费希尔建议可采用

$$\alpha_t = D_{tt}/hv^* = 0.6 \pm 50\% \quad (5.104)$$

## 3. 纵向扩散系数

从性质上说,紊动引起的纵向扩散和横向扩散都不受边界的制约,因而可预计纵向扩散系数和横向扩散系数会有相同的量级。由于纵向扩散和纵向离散的作用常混在一起,从实验量出的资料很难把它们分开,所以难以取得纵向扩散系数的值。但因为纵向离散的作用远大于纵向扩散的作用,例如在二维明槽得出纵向离散系数为  $D_L = 5.86hv^*$ , 纵向扩散系数  $D_{11}$ , 即使采用式(5.103)  $D_{11}$  的值也只有  $0.15hv^*$ , 比  $D_L$  值约小 40 倍,实用上一般都可以忽略。所以有关纵向扩散系数的研究也就不那么重要了。

### 三、河流的纵向离散系数

河流中达到全断面完全混合,即进入离散段以后,断面的平均浓度  $C_a$  沿纵向变化的计算常用一维纵向移流离散方程

$$\frac{C_a}{t} + V \frac{C_a}{x_1} = \frac{1}{A} \frac{1}{x_1} A(D_L + D_{11}) \frac{C_a}{x_1} \quad (5.12)$$

对于顺直河道沿程断面近似不变的情况,并忽略纵向扩散系数  $D_{11}$ , 上式成为

$$\frac{C_a}{t} + V \frac{C_a}{x} = D_L \frac{C_a}{x^2} \quad (5.105)$$

为了省略,以下将断面平均浓度  $C_a$  的脚标略去,并按一般习惯写  $x_1 = x$ (纵向),  $x_2 = z$ (垂向),  $x_3 = y$ (横向)。这样问题主要在于纵向离散系数  $D_L$  的确定。天然河流的断面形状、平面形态、纵向坡度和粗糙情况等都是变化的,甚至变化相当剧烈,因而流速分布在各方向都不均匀,离散作用较大,其纵向离散系数  $D_L$  值远大于二维明槽流的情况。根据文献[10]中介绍国外的一些天然河流的离散系数  $D_L$  值其变化范围很大,  $D_L/hv^*$  的比值最小为 8.6, 而最大竟达 7500。所以如何确定  $D_L$  值成为一个重要而又较复杂的问题。目前有下列几种确定  $D_L$  值的方法。

#### 1. 用断面流速分布资料推算

对于二维明槽流动。爱尔德已得出用垂线上的纵向流速分布来计算  $D_L$  的关系式(5.47)。对于天然河流,费希尔首先指出纵向离散主要是由于纵向流速在横向不均匀分布所造成,垂向分布的影响可以忽略不计。他将爱尔德的方法推广,按相同的方法分析推演,得出用单宽流量在横向分布来计算  $D_L$  的积分表达式:

$$D_L = - \frac{1}{A} \int_0^W q(y) \int_0^y \frac{1}{D_{tt}h(y)} \int_0^y q(y) dy dy dy \quad (5.106)$$

式中  $A$  为横断面面积,  $W$  为河宽,  $D_{tt}$  为横向扩散系数,  $h(y)$  为当地局部水深,  $q(y)$  为相对于平均单宽流量的横向坐标为  $y$  处的单宽流量的偏离值。有了断面上单宽流量在横向分布的资料便可计算  $D_L$  值。但严格说来式(5.106)只适用于断面沿程不变的流动,应用于顺直的河道只是近似的。对于沿程断面变化很大,平面上又是弯曲的非顺直河流则需要修正。

## 2. 用经验公式估算

当缺乏流速分布资料,作为粗略估算可用经验公式。这类公式不少,现举几个如下。

费希尔于 1975 年提出的公式

$$D_L = 0.011 \frac{V^2 W^2}{h v^*} \quad (5.107)$$

据称和实测资料相差不超过 4 倍,实测资料的准确性也会有 2 倍之差,因此相差能控制在 4 倍之内就算不错了。

Liu, H. 于 1977 年提出下式

$$D_L = \frac{V^2 W^3}{v^* A} = 0.18 \frac{v^*}{V}^{1.5} \quad (5.108)$$

其后于 1980 年他又提出

$$D_L = \frac{v^* A}{h^3} \quad (5.109)$$

式中  $\alpha$  为无量纲系数,一般可取 0.6 或 0.5。

McQuivery 和 Keefer 于 1974 年提出一个简单的公式

$$D_L = 0.058 \frac{Q}{SW} \quad (5.110)$$

式中  $Q$  为流量,  $S$  为能坡。

河流的水力条件变化很大,对于不同条件的河流,各种经验公式的适用性可能不同,使用时应当谨慎,其结果只能作为一种粗略的估计。我们曾用这些经验公式计算四川沱江内江段的离散系数,并和实测资料比较,发现(5.107)和(5.110)两式较好,相对来说这两个公式适用于像沱江那样的同类河流。沱江中段平面上蜿蜒曲折,纵剖面滩沱交错,是在低山丘陵地带流过的一条中等河流。

### 3. 用现场浓度观测资料计算

要较准确地确定特定河流的纵向离散系数,可以在现场进行示踪试验。一般在指定地点瞬时集中投放示踪剂(如罗丹明),在下游达到完全混合的离散段内选定量测断面,采样量测浓度的过程线,根据浓度过程线计算纵向离散系数值。量测与计算方法一般有下列几种。

(1) 单测站方差计算 此法只在离散段设置一个量测断面、将瞬时投放的示踪源近似看作平面源,在离散段的浓度变化可由一维纵向离散方程(5.105)的瞬时平面源的解表示,即

$$C(x, t) = \frac{M}{4 D_L t} \exp - \frac{(x - Vt)^2}{4D_L t} \quad (5.111)$$

由此可推求测站断面浓度过程线的方差为

$$\sigma_t^2 = \frac{2D_L x_0}{V^3} \quad (5.112)$$

式中  $x_0$  为测站的源点距,故  $D_L$  值可由下式计算

$$D_L = \frac{\sigma_t^2 V^3}{2x_0} \quad (5.113)$$

此法较简便,但存在初始段的影响,误差较大。

(2) 两测站方差计算 在离散段设置上下游两个量测断

面,距投放断面距离分别为  $x_1, x_2$ 。进行浓度时间过程线的测量。设其方差分别为  ${}^2_t Q_1, {}^2_t Q_2$ 。可以证明

$$D_L = \frac{V^3}{2} \frac{d {}^2_t}{dx} \quad (5.114)$$

或 
$$D_L = \frac{1}{2} \frac{V^2}{t_2 - t_1} [ {}^2_t Q_2 - {}^2_t Q_1 ] \quad (5.115)$$

此法用两断面上的方差值之差计算,因而初始段的影响抵消了。但因低浓度的量测不易准确,对方差有较大影响,故所得结果仍会有较大的误差。

(3) 演算法 此法是费希尔提出的,其基础是一维纵向离散方程的积分解。也要用两个断面的浓度过程线资料。计算时先估计一个  $D_L$  值,并以上游断面测得的浓度过程线  $C(x_1, t)$  作为初始条件,即设想为一连续集中源,按下式推求下游断面的浓度时间过程线  $C(x_2, t)$ :

$$C(x_2, t) = \frac{C(x_1, t_1)}{4 D_L (t_2 - t_1)} \times \exp - \frac{[x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)]^2}{4 D_L (t_2 - t_1)} \quad (5.116)$$

将算得的  $C(x_2, t)$  和实测的下游断面浓度过程线比较,如两者误差较大,则修改  $D_L$  值,直到两者符合很好时,此  $D_L$  值即为两断面之间的河段的平均离散系数值。演算法去除了采用方差计算产生的误差,但在假定上也还有些问题,方法也不是很严密的。

对离散系数确定方法的详细讨论可参考文献[41]。

采用现场实测资料来确定  $D_L$  值自然是最可靠的方法,但进行一次现场观测所耗费的人力和物力是巨大的,因而不是一般情况所能做到的。

天然河流的纵向离散系数实测的数值变化范围很大,已见前述,其原因是由于河道本身存在各种不规则性质,包括天然的状态

如弯道、沙洲、滩沱起伏,也有人工设施的影响如丁坝、护岸、桥墩等等。要把这些不规则性对离散的影响都研究清楚是难以做到的。目前在两个问题上有过一些研究。

(1) 弯道的影响 弯道中水流断面上的流速分布和均匀直段不同,一般是近凹岸流速大,而凸岸边则流速小,流速分布的不均匀性大于直段河渠,因而使离散系数值增大。虽然弯道的作用也会增加横向混合的速率,使浓度分布不均匀性减小些,从而多少减小离散系数值,但毕竟流速的不均匀影响是主要的。

天然河道的弯道方向大都是交替变化的,流速的最大值从河流一侧转到另一侧,定常状态的浓度分布也相应发生交替的变化。但如相邻两个弯道很靠近时,就没有足够的时间来调整浓度分布以形成适应于流速分布的定常状态。在这种情况下,浓度分布的变化就较小,而纵向离散系数也将较小。费希尔通过研究认为弯道是否足够长,取决于在横断面上扩散时间与水流流过弯道所需时间之比,提出一个判别数 为<sup>[10]</sup>

$$= \frac{W^2}{D_{tt}} \bigg/ \frac{L}{V} \quad (5.117)$$

式中L为弯道长度。如  $< 25$ , L较长,浓度分布可建立定常状态,用式(5.106)来求纵向离散系数是合适的。反之,如  $> 25$ , L较短,则建立不起浓度的定常分布了。

(2) 次流滞留区的影响 天然河流中常常有各种次流区(死水区)。如河床上由于起伏不平,在突起物的下游就在主流的下面出现漩涡区(图 5.7a)。在平面上由于河岸的凹凸、丁坝等建筑物影响也会发生大大小小的回流区(图 5.7b)。当河道的主流挟带污染物质流过次流区时,主流与次流区分界面上紊动掺混的作用使污染物质进入次流区,暂时滞留下来。等到主流中的污染物质大部随流下移以后,在次流区内滞留的污染物质又逐渐放出,加入到主流中。这些次流区对污染物质的滞留作用常使混合的初始段的



长度增加,同时也对离散系数的值有较大的影响。

图 5.7 次流滞留区的影响

次流区对离散的影响国外也有过一些研究,如范伦梯恩 (Valentine, E. M. 1977) 做过在槽底用板条形成次流区的试验<sup>[42]</sup>, 何里 (Holley, E. R. 1978) 等用浓度矩法进行分析等<sup>[43]</sup>。但和实际应用尚有相当距离。

#### 四、感潮河段的离散

河流下游在入海前的河段因受潮汐作用,其流动为有周期性回荡的非定常流,水流中污染物质的浓度分布也将随时间和空间而变化。这种问题的性质在 5.5 节中已有论述,但该节只针对一种较简单的情况。在实际潮汐河段中,河流的边界条件、来流情况和潮汐的性质等都复杂得多,从理论上作较严格的分析目前尚难做到,在实际工作中,最常用的还是一维分析方法。用一维方法分析感潮河段的离散的数学模型有随潮变化和潮周平均两种。

##### 1. 随潮变化

随潮变化的一维离散方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(AC) + \frac{\partial}{\partial x}(VAC) = -\frac{\partial}{\partial x} K_r A \frac{C}{x} + (\text{源、汇项}) \quad (5.118)$$

式中  $V$ 、 $C$  分别为断面平均流速和断面平均浓度, 都是随潮汐变化的量,  $K_t$  表示与潮汐变量相应的混合系数。对流动的分析也要用一维非定常流的方程组, 以水位  $z$  和流速  $v$  为变量的形式为

$$\text{连续方程} \quad B \frac{z}{t} + \frac{1}{x}(VA) = 0 \quad (5.119)$$

$$\text{动量方程} \quad \frac{V}{t} + V \frac{V}{x} + g \frac{z}{x} + kV|V| = 0 \quad (5.120)$$

式中  $B$  为水面宽,  $k$  为河流阻力系数。采用这个模型的问题主要在于随潮变化的离散系数或混合系数很难确定。

## 2. 潮周平均

潮周平均的一维离散方程为

$$A \frac{\bar{C}}{t} + Q \frac{\bar{C}}{x} = \frac{1}{x} K A \frac{\bar{C}}{x} + (\text{源、汇项}) \quad (5.121)$$

式中各变量的顶标  $\bar{\quad}$  表示一个潮周内的平均值, 偏导数  $\frac{\bar{\quad}}{t}$  是指每个潮周的变化,  $K$  表示在潮周内所有混合过程结果的系数。这个模型比前一个要简单得多, 但将移流扩散方程在整个断面上和整个周期中加以平均化, 这样的推导过程是要作一些假设的。实际上式(5.121)可看作是一个半经验的模型, 需要用实际资料来验证和确定其混合系数  $K$ 。

在实际工作中有时更简单地用稳态模型计算, 即设离散系数不随时间变化, 跨潮周作大平均, 流动参量也是定常的, 只有距离上的变化。这样处理自然有相当误差, 可以认为在潮汐加速度小时才可以作这种近似, 这需要经过一定的分析, 而且要选用合适的等效离散系数, 也不是简单容易确定的<sup>[44, 51]</sup>。

一维分析法虽然较为简单实用, 对于一些分叉河网也便于作结点法分析, 但必然受到一定的限制, 如河道出口段很宽, 盐水的入侵出现显著的分层等就需要很好考虑。不过尽管使用计算机, 二维和三维的分析也仍然有许多实际上的困难。在河口如果还有风

力作用等则问题更复杂,河口的离散、混合问题的研究目前相当活跃,但其成熟程度比内河更差些,读者可参考有关文献[10]。

图 5.8 例题 5.1 附图

例题 5.1 某河段上实测过流断面的几何形状如附图所示。根据实测资料把断面分为 4 块,已知每块的宽度  $y$ 、面积  $A$  和平均流速  $\bar{u}$  如附表所列。横向扩散系数  $D_{tt} = 0.0124\text{m}^2/\text{s}$ 。试求纵向离散系数  $D_L$  值。

块 号	1	2	3	4
$y(\text{m})$	2.1	3.0	3.1	2.0
$A(\text{m}^2)$	1.18	3.93	6.18	1.10
$\bar{u}(\text{m}/\text{s})$	0.032	0.301	0.350	0.020

[解] 断面过流情况

$$\text{面积 } A = 12.39\text{m}^2$$

$$\text{流量 } Q = A \cdot \bar{u} = 3.406\text{m}^3/\text{s}$$

$$\text{断面平均流速 } V = Q/A = 0.275\text{m}/\text{s}$$

纵向离散系数计算公式(5.106)

$$D_L = - \frac{1}{A} \int_0^w q(y) \int_0^y \frac{1}{D_{tt}h(y)} q(y) dy dy$$

式中  $q(y) = \bar{u}(y)h(y)$

$$\bar{u}(y) = V = 0.275$$

$$h(y) = A/y$$

分 4 块列表按差分近似计算  $D_L$  式中的三重积分值如下表

项 目 \ 块 号	1	2	3	4	
y (m)	2.1	3.0	3.1	2.0	
h(m)	0.562	1.310	1.994	0.550	
u(m/s)	- 0.243	0.026	0.075	- 0.255	
q(m <sup>2</sup> /s)	- 0.137	0.034	0.150	- 0.140	
Q(m <sup>3</sup> /s)	- 0.287	0.102	0.465	- 0.280	
y (m)	0	2.1	5.1	8.2	10.2
$\int_0^y q dy$ (m <sup>3</sup> /s)	0	- 0.287	- 0.185	0.280	0
$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{D_{tth}} \int_0^y q dy dy$ (m)	- 43.24	- 43.59	5.96	41.06	
$\int_0^y \frac{1}{D_{tth}} \int_0^y q dy dy$ (m)	0	- 43.24	- 86.83	- 80.87	- 39.81
$\int_{y_i}^{y_{i+1}} q \int_0^y \frac{1}{D_{tth}} \int_0^y q dy dy dy$ (m <sup>4</sup> /s)	6.22	- 6.63	- 38.99	16.90	
$\int_0^y q \int_0^y \frac{1}{D_{tth}} \int_0^y q dy dy dy$ (m <sup>4</sup> /s)	0	6.22	- 0.41	- 39.40	- 22.50

由上表得出对全河宽的三重积分值为- 22.50m<sup>4</sup>/s。

纵向离散系数

$$D_L = - \frac{(- 22.50)}{A} = \frac{22.50}{12.39} = 1.82m^2/s。$$

# 第六章 射流、浮力羽流和浮射流

## 6.1 概 述

射流是指从各种排泄口喷出流入周围另一流体域内运动的一股流体。它和管道或明槽中流动不同之处在于：管道流周界全部是固体，明槽流除水面外大部分周界也是固体，射流则除附壁射流以外，大多数类型的射流的全部周界都是流体，使得射流具有不受固体边界制约的很大的自由度。这个特点对分析射流运动甚为重要。

许多工程技术领域都有大量射流问题。在环境工程排污、排热、排气的排放出口后近区流动属于射流性质，其流场和浓度场的分析更是需要直接应用射流理论，故本章将对此作篇幅较多的论述。

### 一、射流的类型

从不同的角度考虑可以将射流分为各种类型。

按流动型态可分为层流射流和紊动射流(湍射流)。工程实际问题中多为紊动射流，是本章讨论的对象。

按射流的物理性质可分为不可压缩射流和可压缩射流；等密度射流和变密度射流。对于需要用可压缩流理论分析的高速气体射流不在本书讨论的范围之内。

按射流的断面形状可分为平面(二维)射流，圆形(轴对称)射流，矩形(三维)射流等。

按射流周围环境的条件也可进行分类如下。

从环境固体边界的情况划分: 在无限空间的流体内运动的称为自由射流; 在有限空间的流体内运动的为非自由射流或有限空间射流, 其中如有一边贴附固体边界的称为附壁射流, 水射流沿水面射出的称为表面射流。

从周围流体的性质划分: 射入同种性质流体之内的称为淹没射流, 射入不同性质流体之内的则为非淹没射流(如大气中的水射流)。

影响射流运动的环境条件, 除了上述有限空间射流的固体边界几何条件以外, 更要受周围流体状态的影响, 即周围流体是静止的还是流动的, 其流动方向是平行于射流的还是和射流有一定交角的横流, 流动的紊动强度以及流体密度的变化有无分层等等。

最后, 按射流的原动力还可以分为动量射流、浮力羽流和浮射流三类。动量射流以出流的动量为原动力, 对以后的运动这个动量的作用仍是主要的。一般等密度的射流属于这种类型, 也称为纯射流。浮力羽流则是以浮力为原动力, 如热源上产生的烟气。因这种流动的形状和羽毛相似而得此名称。浮射流的原动力包括出流动量和浮力两方面, 如火电站或核电站的冷却水排入河流或湖池中的热水射流, 污水排入密度较大的河口、港湾等海水中的污水射流等都是浮射流的例子。

下面将从不可压缩的等密度淹没自由紊动射流在静止流体中的运动作为基本情况开始分析, 然后扩大到复杂的类型和环境条件。

## 二、紊动射流的特性

### 1. 紊动射流的形成, 卷吸与混合作用

设流体从一条很长的窄缝流出, 射入无限空间的静止流体中, 形成二维平面射流, 其过程可描述如下。流体射入静止环境中时,

与周围静止流体之间存在速度不连续的间断面, 间断面一般受到不可避免的干扰, 失去稳定而产生涡旋, 涡旋卷吸周围流体进入射流, 同时不断移动、变形、分裂产生紊动, 其影响逐渐向内外两侧发展, 形成内外两个自由紊动的混合层。由于动量的横向传递, 卷吸进入的流体取得动量而随同原来射出的流体向前流动, 原来的流体失去动量而降低速度, 在混合层中形成一定的流速梯度, 出现剪

图 6.1 紊动射流的形成

切应力, 故也称剪切层。卷吸与混合作用的结果, 射流断面不断扩大, 流速则不断减低, 流量却沿程增加。

涡旋的发展呈现紊流的间歇现象, 即时而是紊流时而是层流的现象, 在射流边界附近尤为显著。射流边界实际上是一个由紊动涡体和周围流体交错组成的不规则面(参见图 6.2 空气射流和图 6.3 水射流的流动显示照片)。有一些实验资料表明, 在  $u/u_m = 0.1$  处( $u_m$  为轴线流速), 间歇系数(紊流占总时间的比值) = 0.5。但一般实际分析中常从统计平均意义上把射流边界看作线性扩展的界面。

## 2. 紊动射流的分区结构

紊动射流在形成稳定的流动形态后, 整个射流可划分为几个区段: 由喷口边界起向内外扩展的紊动掺混部分为紊流剪切层混合区; 中心部分未受到掺混影响, 保持原来出口流速, 称为核心区。从出口至核心区末端的一段称为射流的起始段, 紊动充分发展以

图 6.2 空气射流的流动显示照片  
(引自 Panton 1984)<sup>[17]</sup>

图 6.3 水射流的流动显示照片  
(引自 Panton, 1984)<sup>[17]</sup>



后的部分称为射流的主体段。主体段与起始段之间有过渡段。过渡段较短, 在分析中为简化起见常忽略, 只将射流分为起始段和主体段。各区段的划分见图 6.4。

图 6.4 紊动射流的分区

### 3. 纵向流速分布的相似(自保性)

由实验观测得知, 在射流的主体段, 各断面的纵向流速分布有明显的相似性, 也称自保性。图 6.5(a) 为静止流体中平面射流不同断面上的流速分布实测资料, 随着距离  $x$  的增加, 轴线流速  $u_m$  逐渐减小, 流速分布曲线也趋于平坦。如改用无量纲值表示, 以  $u/u_m$  为纵坐标,  $y/b_{\frac{1}{2}}$  为横坐标( $u$  是坐标为  $y$  处的流速,  $b_{\frac{1}{2}}$  是流速等于  $u_m/2$  处的坐标), 则主体段所有断面的无量纲流速分布曲线基本上是相同的, 如图 6.5(b) 所示。

实验资料还说明, 在起始段的剪切层混合区内流速分布同样具有这种相似性, 图 6.6 即为平面射流起始段混合区中无量纲流速分布的实验资料, 纵坐标为  $u/u_0$ , 横坐标为  $y_{\perp} / b_{m\frac{1}{2}}$  ( $y_{\perp} =$

图 6.5 平面射流主体段的流速分布(Forthmann 实验资料)

$y_{\frac{1}{2}} = y$ ,  $b_{m\frac{1}{2}} = y_{\frac{1}{2}} - y_{0.9}$ ,  $y_{\frac{1}{2}}$  是流速为  $u_0/2$  处与  $x$  轴的距离,  $y_{0.9}$  是流速为  $0.9u_0$  处与  $x$  轴的距离), 由图可看出不同断面的点子均在同一曲线上。

流动环境中的射流也可观测到这种流速分布的相似性。图 6.7 即为平行流中平面射流主体段的无量纲流速分布曲线, 纵坐标为  $\frac{u - u_m}{u_m - u}$ , 横坐标仍为  $y/b_{\frac{1}{2}}$ ,  $u$  是和射流流速  $u_0$  平行的周围流体的流速。

对于圆形断面射流也有类似的资料, 这里不再列举。

图 6.6 平面射流起始段混合区流速分布  
(Albertson 实验资料)

图 6.7 平行流中平面射流流速分布  
(Bradbury 实验资料)

#### 4. 射流边界混合层的线性扩展

令  $b$  表示射流主体段的半厚度(在起始段相应地为混合层厚度  $b$ ), 实验观测得知射流的厚度是线性扩展的(严格说来具有统计平均意义), 但主体段的扩展率和起始段略有不同。将主体段的边界线延长和轴线相交于  $O$  点,  $O$  点称为射流源。以  $O$  点为坐标原点, 则

$$\frac{b}{x} = \text{const} \quad (6.1)$$

这个性质也可以从下面分析得出。

在自由紊动射流的情况下, 没有固体边界限制质点的紊动, 按普朗特的观点, 假定在射流横断面上混合长度  $l$  为常数, 同时和混合层半厚度  $b$  成正比, 即

$$\frac{l}{b} = \text{const} \quad (6.2)$$

射流随时间的扩展可以认为是比例于横向脉动流速  $v$ , 又按普朗特混合长度理论  $v = l \frac{u}{y}$ , 故可写

$$\frac{Db}{Dt} = v = l \frac{u}{y} \quad (6.3)$$

按射流不同断面流速分布相似的性质, 可写

$$\frac{u}{y} = \frac{u_m}{b} \quad (6.4)$$

将式(6.2)、(6.4)代入式(6.3)得

$$\frac{Db}{Dt} = l \frac{u_m}{b} = u_m \quad (6.5)$$

另一方面由数学关系  $\frac{Db}{Dt} = \frac{db}{dx} \frac{dx}{dt}$ , 而  $\frac{dx}{dt} = u_m$ , 则得

$$\frac{Db}{Dt} = u_m \frac{db}{dx} \quad (6.6)$$

比较式(6.5)和式(6.6)可见  $\frac{db}{dx} = \text{const}$ ,  $b = x \cdot \text{const}$ 。也就是混合

层及主体段边界都将按线性规律扩展。将这个关系代入式(6.2)可得

$$l = cx \quad (6.7)$$

$c$  是常数, 即混合长度也沿流程按线性规律增大。

现回过来看射流流速分布相似的问题, 据此相似性, 射流主体段各断面流速分布应有共同规律:

$$\frac{u}{u_m} = f \frac{y}{b} \quad (6.8a)$$

或 
$$\frac{u}{u_m} = f_1 \frac{y}{b_{\frac{1}{2}}} \quad (6.8b)$$

因  $b$  值难于准确测定, 上式是以  $u/u_m = \frac{1}{2}$  处的半厚度  $b_{\frac{1}{2}}$  作为特性长度。当然也可以用其他特性长度作为断面各点位置的比较尺度。

考虑到式(6.1)  $b \propto x$  的线性关系, 可知

$$\frac{u}{u_m} = f_2 \frac{y}{x} \quad (6.9)$$

故主体段中无量纲流速的等值线是通过极点(射流源)的一族直线, 如图 6.8 所示。

图 6.8 自由射流主体段中无量纲流速等值线

## 5. 等密度自由射流的动量守恒

等密度自由紊动射流周围环境的压强是静压分布,对于气体可看作常数。射流内部的压强,有实测资料说明它和静压分布是略有差别的,但差值最大不超过  $u_m^2$  的 5—6%,一般分析时都可按静压分布处理,则有沿流向  $p/x = 0$  的关系。按动量定律可得到一个结论:单位时间通过射流各断面的流体的总动量,即动量通量是常数。即

$$\int_m u dm = \int_A u^2 dA = \text{const} \quad (6.10)$$

对于变密度自由射流,这个关系就不存在,将在后面讨论。

## 6. 自由射流的若干紊动特性

紊动射流是紊动很剧烈的一种流动,上面主要从时均运动的角度讨论,为深入研究射流运动的本质,还需要了解它的紊动特性。近一、二十年由于热线、热膜及激光等先进测速仪器的被采用,已取得一些和射流结构有关的紊动资料。虽然还没有很系统的结论,但从部分资料已可以多少窥见射流的若干紊动性质。

图 6.9 为环境有伴随平行流动的圆形断面射流沿轴线的流速

图 6.9 轴对称射流轴线流速的紊动强度(按 Antonia 试验)

紊动强度  $\frac{\overline{u'^2}}{u_m^2} / (\overline{u_m} - u_0)$  的变化资料(图中  $m = u / u_0$ )。由图可见,射流的脉动流速和时均流速属于相同量级,足见射流中紊动的

强烈。同时还可看到在  $x/D = 150$  后紊动强度近似为常数,表明流动的真正相似是在距喷口较远处才能达到的。

图 6.10 至图 6.14 都是平面射流的紊动资料(按 Bradbury 试验, 1965)。其中图 6.10 为射流断面上横向和垂向脉动流速  $v, w$  分别与纵向脉动流速  $u$  的强度(以均方表示)比值,说明三个方向脉动流速的强度大小也属于相同量级。

图 6.10 平面射流各方向脉动流速强度的比值

图 6.11 为射流断面上纵向流速紊动强度的分布,紊动强度的最大值不在轴线上,而在距轴线约  $0.7y/b_{1/2}$  处。图 6.12 为紊动切应力的分布,是按时均流速资料推算的。

图 6.13 为平面射流纵向脉动流速均方值的频谱,横坐标是频率  $n$  的无量纲值  $= nb_{1/2}/u$ ,纵坐标是  $\overline{u^2}$  的一维能谱函数  $F(\quad)$ 。资料表明,对于较高的频率,即较小的涡旋,统计平衡区的  $-5/3$  衰减律得到较好的符合。

图 6.11 平面射流纵向流速紊动强度分布

图 6.12 平面射流紊动切应力分布



图 6.13 平面射流 $\overline{u^2}$ 的频谱

图 6.14 是平面射流横断面上的紊动动能的平衡关系曲线。

### 三、射流问题的分析途径

紊动射流问题的研究,其目的主要在于确定射流轴线的轨迹、射流扩展的范围和射流中流速的分布,对于变密度、非等温和挟带有污染物质的射流则还有密度分布、温度分布和挟带物质的浓度分布。流速分布是个矢量场的确定问题,密度分布、温度分布和浓度分布则属于标量场的确定问题。

这类问题的分析目前有三种途径:一个是以实验为主采用量纲分析整理实验资料求得实用的经验关系式的方法。这个方法虽然偏经验性,但对于复杂的射流问题,目前难以用理论计算解决时,它还是一个重要的途径。在理论分析方面则有两个途径:一个

图 6. 14 平面射流中紊动能量的平衡关系

是求解射流边界层偏微分方程;另一个是采用动量积分方法将偏微分方程变为常微分方程来求解。

射流问题能够应用边界层理论的原因是由于射流的纵向尺度远大于其横向尺度,因此可以这样简化。但要指出,射流边界层是由两部分流速不等的流体的交界面发展而来的,和固体壁面上的边界层受固体壁面阻滞所产生者不同,后者的发展受到壁面的限制,紧靠壁面存在粘性底层;前者则可以自由发展,没有粘性底层,射流的全部流动区域都为自由紊流(只有附壁射流为例外)。不可压缩流动的紊流边界层微分方程在 3. 2 节中已有介绍,这里不再重复。解决问题的关键在于雷诺应力项,亦即紊流模型的确定。过

去工程上最常用的还是时均流模型,即湍粘性模型或混合长度模型,近年对于一些较复杂的射流问题,已有应用  $k$ - $\epsilon$  二方程模型计算的成功实例。

用动量积分方法求解射流问题是工程上最常用的方法。计算射流动量通量沿流程的变化要求给出断面上的流速分布,这就要先假定沿射流各断面上的流速分布是相似的,即所谓相似性假定。从紊流结构在流动过程中有可能保持同样的形式,即从具有自保性的角度考虑,这个假定是有其合理性的,且已得到许多实验的证实。在此基础上可由实验或结合一些理论分析定出断面上流速分布的模式。此外对射流的边界条件还要作一个假定,它可以是对射流的厚度变化作线性扩展的假定;也可以对射流从侧边卷吸周围流体的流量或流速作出一个卷吸假定。

在下面各节将结合各种问题的分析介绍上述各种方法。

## 6.2 等密度自由紊动射流

本节按不可压缩流动的理论讨论等密度自由紊动射流的运动,而且是射入静止的同种流体中的情况,这是射流中最简单而又最基本的情况。由此出发便于理解现象的主要特征和掌握分析问题的方法。这种基本情况在实际问题中也是存在的。此外,当射流中含有各种杂质时,如果含有物的浓度对于射流的密度没有影响或影响甚微,对流动的作用可以忽略时,则这种含有物质可看作一种标志物质(示踪剂),它的浓度分布与射流的速度分布在分析中可以分开考虑,因此仍可按等密度射流理论进行分析。

### 一、平面自由紊动射流的动量积分解

从窄长的缝隙或孔口喷出的射流可按平面(二维)问题分析。

一般当出口雷诺数  $Re = \frac{2b_0u_0}{\nu} > 30$  时可认为射流是紊动的。本节讨论无限空间静止流体中等密度平面二维紊动射流的运动。

### 1. 主体段的流动

工程问题多着重研究主体段的流动, 要求了解射流的扩展范围, 沿程速度的变化和流量的变化。对于含有混合物质的射流, 则还有含有物浓度的变化。

从自由射流流场静压分布的假定条件, 按动量定律可得沿射流各断面动量通量守恒的结论, 按单位宽度考虑, 这个关系可写成下式

$$M = \int_M u dm = \int_{-b}^{+b} \rho u^2 dy = \text{const} \quad (6.11)$$

一般出口断面的动量通量是已知的, 其单宽值为  $2 \rho u_0^2 b_0$ ,  $u_0$  是出口流速,  $b_0$  是射流出口断面的半厚度。故应有

$$\int_{-b}^{+b} u^2 dy = 2 \rho u_0^2 b_0 \quad (6.12)$$

在主体段射流紊动充分发展区域, 各断面的流速分布存在相似关系, 即

$$\frac{u}{u_m} = f \left( \frac{y}{b} \right) \quad (6.13)$$

$b$  为射流断面的特性半厚度。由于射流边界的不规则, 这个特性半厚度常取流速等于轴线最大流速  $u_m$  的规定比值(如  $1/2$ ,  $1/e$  等)处的  $y$  值为标准, 如图 6.15 中的  $b_e$ , 该点的流速就等于  $u_m / e = 0.368u_m$ 。

动量积分的计算取决于相似分布的函数。根据实验资料和紊流随机性质的考虑, 这个函数多采用高斯正态分布的形式, 即

$$u = u_m \exp - \frac{y^2}{b^2} \quad (6.14)$$

如取  $b_e$  为特性半厚度, 则当  $y = b_e$  时, 正好得  $u/u_m = e^{-1} = \frac{1}{e}$ 。以函

图 6.15 平面自由紊动射流

数(6.14) 计算积分

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy &= 2 \int_0^{\infty} u_m^2 \exp\left[-\frac{y^2}{b_e^2}\right] dy \\
 &= 2u_m^2 \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{2}{b_e^2} y^2\right] dy \\
 &= 2u_m^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{2}{b_e} = \frac{2}{2} u_m^2 b_e \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

代入式(6.12) 得

$$\frac{2}{2} u_m^2 b_e = 2u_0^2 b_0 \quad (6.16)$$

从实验得知射流厚度基本上是线性扩展的, 可设

$$b_e = x \quad (6.17)$$

代入式(6.16), 求得射流轴线流速的关系式

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{x}^{1/2} \frac{2b_0}{x}^{1/2} \quad (6.18)$$

可见  $u_m$  和源点距  $x$  的平方根成反比。

由于射流侧边卷吸作用, 流量沿程增大, 任一断面的单宽流量为

$$Q = \int_{-b_e}^{b_e} u dy = 2 \int_0^{b_e} u_m \exp - \frac{y^2}{b_e^2} dy$$

$$= \overline{b_e u_m} \quad (6.19)$$

出口单宽流量  $Q_0 = 2b_0 u_0$  (6.20)

故流量增大比为  $\frac{Q}{Q_0} = \frac{\overline{b_e u_m}}{2 b_0 u_0}$  (6.21)

以式(6.17)、(6.18)代入得

$$\frac{Q}{Q_0} = \left( \frac{\overline{2}}{2} \right)^{1/2} \frac{x}{2b_0}^{1/2} \quad (6.21a)$$

可见流量是和源点距  $x$  的平方根成正比的。当射流含有混合物时,  $Q/Q_0$  就是含有物浓度的平均稀释度。

射流沿轴线的流量增加率为

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= Q_0 \left( \frac{\overline{2}}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{2b_0}^{1/2} \frac{d(x^{1/2})}{dx} \\ &= 2b_0 u_0 \left( \frac{\overline{2}}{2} \right)^{1/2} \frac{1}{2b_0}^{1/2} i \alpha \frac{1}{2} (x)^{-1/2} \\ &= \frac{\left( \frac{\overline{2}}{2} \right)^{1/2}}{2} \frac{2b_0}{x}^{1/2} u_0 \end{aligned}$$

以式(6.18)代入整理得

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{\overline{2}}{2} u_m \quad (6.22)$$

按连续原理, 流量沿程的增量  $dQ$  应等于射流从侧边在  $dx$  距离上卷入的流量, 设正交于轴线方向卷入流速的绝对值以  $v_e$  表示, 则从两侧卷入的流量为  $2v_e dx$ , 即

$$dQ = 2v_e dx \quad (6.23)$$

比较式(6.22)和式(6.23)得  $2v_e = \frac{u_m}{2}$ , 可见  $v_e$  与  $u_m$  成正比, 即

$$v_e = \frac{u_m}{4} \quad (6.24)$$

系数 称为卷吸系数。则在平面射流

$$= \frac{u_m}{4} \quad (6.25)$$

采用阿尔伯逊 (Alberson, M. L.) 等的实验资料<sup>[19]</sup>,  $v_e = 0.154 u_m$ , 则得:

$$\text{射流卷吸系数} = 0.069$$

$$\text{射流半厚度} \quad b_e = 0.154x \quad (6.17a)$$

$$\text{射流轴线流速} \quad \frac{u_m}{u_0} = 2.28 \frac{2b_0}{x}^{1/2} \quad (6.18a)$$

$$\text{流量比(平均稀释度)} \quad \frac{Q}{Q_0} = 0.62 \frac{x}{2b_0}^{1/2} \quad (6.21b)$$

主体段的这些关系式严格说来应该是在紊动充分发展的相似性区域内才正确, 而在什么范围才达到严格的流动相似则还没有一致的结论。一般实用上忽略过渡区, 认为在势流核心结束后即可用主体段的关系式计算。这样, 起始段的长度  $L_0$  就可由式(6.18a)令  $u_m = u_0$  解出  $x$  值求得:

$$\text{起始段长度} \quad L_0 = 5.2(2b_0) \quad (6.26)$$

上述各式中断面距离  $x$  值应从射流源点起算, 但实用上常从出口起算, 忽略由此引起的误差。

上面是射流断面上流速分布采用高斯分布的结果。如果采用其他分布就会得出稍有不同的关系式。举另一个较常用的例子如下。

阿勃拉摩维奇 (Abramovich, G. I.)<sup>[20]</sup> 建议断面流速分布可用指数型的近似关系:

$$\frac{u}{u_m} = 1 - \frac{y}{b} \quad (6.27)$$

得出的轴线流速为

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{1.2}{\frac{as}{b_0} + 0.41} \quad (6.28)$$

式中  $s$  是从出口起算的距离;  $a$  是反映紊动性质的系数,  $a = 0.09 \sim 0.12$ ;  $b$  是到射流边界的半厚度。式(6.28)中分母的第二项是考虑了从出口至源点距离的影响。

不同研究者分析方法和依据的实验资料不同, 得出结果会略有差异。对轴线流速的表达式可概括为

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{C_1}{\frac{s}{b_0} + C_2} \quad (6.29)$$

$C_1 = 3.12 \sim 3.78$ ,  $C_2 = 0 \sim 2.4$ , 拉贾拉南(Rajaratnam, N.) 建议<sup>[21]</sup>, 实用上可取  $C_1 = 3.5$ ,  $C_2 = 0$ 。则

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{3.5}{s/b_0} \quad (6.30)$$

## 2. 起始段的流动

起始段包括势流核心区和边界层混合区两部分。主要是确定混合区的内、外边界及其流速分布问题。

对于出口流速均匀分布的自由紊动平面射流, 实验得出: 混合区内边界扩展角  $\alpha_1 = 5^\circ$ ; 外边界扩展角  $\alpha_2 = 10^\circ$ 。

混合区的流速分布也具有相似性, 如采用高斯分布, 则为

$$u = u_0 \exp - \frac{y - b_c}{b_m}^2 \quad (6.31)$$

式中  $b_c$  为势流核心区的半厚度,  $b_m$  为混合区的厚度。阿勃拉摩维奇书中有较详细的分析。近年也有新的研究工作, 这里不再详述。



### 3. 射流中标志物质的浓度分布

射流中含有标志物质的浓度分布和流速分布互不影响,可以分开而独立分析。射流断面上标志物质的浓度分布在混合层和主体段也存在相似性。有人从理论和实验得到,在  $u=0$  和  $c=0$  的流体中,射流的浓度分布和速度分布有下列关系<sup>[3]</sup>:

$$\frac{c}{c_m} = \frac{u}{u_m}^{1/2} \quad (6.32)$$

$c_m$  为射流轴线上的浓度。这样,无量纲浓度分布曲线比无量纲速度分布曲线要平坦些(图 6.16)。

图 6.16 流速分布与浓度分布

实验资料说明浓度分布也可采用高斯分布,在主体段可写

$$c = c_m \exp - \frac{y^2}{b_c} \quad (6.33)$$

在起始段混合层为

$$c = c_0 \exp - \frac{(y - b_c)^2}{(b_m)^2} \quad (6.34)$$

式中  $b_c$  为大于 1 的系数,实验求得  $b_c = 1.41$ 。

对标志物质应用物质守恒定律, 射流任意断面标志物质的通量应等于出口断面的相应值, 按单宽考虑, 在主体段

$$\int_{-b}^{+b} c u dy = c_0 u_0 \int_{-b_0}^{+b_0} dy \quad (6.35)$$

$c_0$  为出口断面的浓度。将式(6.33)及式(6.14)代入上式求积分

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{+b} c u dy &= 2 \int_0^b c_m \exp\left[-\frac{y^2}{b_e^2}\right] u_m \exp\left[-\frac{y^2}{b_e^2}\right] dy \\ &= \frac{2}{1 + \frac{2}{b_e^2}} c_m u_m b_e \end{aligned} \quad (6.36)$$

并考虑  $b_e = x$ , 代入式(6.35)最后得

$$\frac{c_m}{c_0} = \frac{1 + \frac{2}{b_e^2}}{2} \frac{1}{2} \frac{2b_0}{x} \quad (6.37)$$

以  $\frac{c_m}{c_0} = 1.41$ ,  $\frac{2b_0}{x} = 0.154$  代入得

$$\frac{c_m}{c_0} = 1.97 \frac{2b_0}{x} \quad (6.37a)$$

## 二、平面自由紊动射流的微分方程解

射流的理论分析由于其纵向尺度远大于横向尺度, 即  $x \gg b$ , 可以应用边界层理论来简化问题。对于等密度定常二维淹没紊动射流, 忽略粘性切应力后, 基本微分方程为

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (6.39)$$

解这个微分方程组时, 从本世纪三十年代开始各家学者曾采用各种不同的紊流模型求得不少成果, 大都针对自由紊动射流  $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0$  的情况。1926年图尔曼(Tollmein, W.)最早采用普朗特在1926年提出的混合长度理论求解。其后主要有格特勒(Gortler, H.)采

用普朗特 1942 年提出的对自由紊流切应力新的关系式;阿勃拉摩维奇采用了泰勒的涡量传递理论等等。近年更有人采用时均流模型以外的紊流模型。解出的结果都得到实验的验证。下面介绍较为简单的格特勒的方法<sup>[3]</sup>,并在书写公式中略去顶标时均符号。

普朗特在 1942 年对自由紊流建议用新的紊流切应力关系式:

$$\tau = - \overline{u'v'} = \tau_t \frac{u}{y} \quad (6.40)$$

$$\tau_t = b(u_m - u_c) \quad (6.41)$$

式中  $\tau_t$  为涡粘性系数;  $u_m$ 、 $u_c$  分别为断面上的最大流速和最小流速,  $b$  为经验常数。上式表明  $\tau_t$  值随射流半厚度  $b$  和最大流速差而变,在同一断面上  $\tau_t$  值不变。

对于在静止流体中的紊动射流,式(6.41)中  $u_c = 0$ , 则  $\tau_t = bu_m$ ,  $u_m$  为轴线流速。将此  $\tau_t$  值代入式(6.40),再由式(6.38)考虑到  $-\frac{D}{X} = 0$ , 得

$$u \frac{u}{X} + v \frac{u}{y} = bu_m \frac{u^2}{y^2} \quad (6.42)$$

取某一特征断面,  $x$  坐标为  $s$ , 射流半厚度为  $b_s$ , 轴线流速为  $u_{ms}$ 。按动量通量守恒条件得到的  $u_m \frac{1}{X}$  和  $b$   $X$  的关系,对于距离为  $X$  的任意断面,其轴线流速和射流半厚度可写为

$$u_m = u_{ms} \frac{X}{s}^{-1/2} \quad b = b_s \frac{X}{s}$$

从而  $\tau_t = \tau_{ts} \frac{X}{s}^{1/2}$  其中  $\tau_{ts} = b_s u_{ms}$

引入新变量  $\eta = \frac{y}{X}$ , 为未定常数,并引入流函数  $F$  :

$$\eta = u_{ms}^{-1} s^{1/2} X^{1/2} F(\eta)$$

则有  $u = u_{ms} \frac{X}{s}^{-1/2} F$

$$v = \frac{1}{2} u_{ms} \left( \frac{x}{s} \right)^{-1/2} F - \frac{1}{2} F$$

将上面各式代入式(6.42), 得到求  $F(\cdot)$  的微分方程:

$$\frac{1}{2} F^2 + \frac{1}{2} F F' + \frac{t_s}{u_{ms} s} F^2 = 0 \quad (6.43)$$

其边界条件为: 当  $x = 0$  时,  $F = 0$  及  $F = 1$   
 当  $x = \infty$  时,  $F = 0$

因  $t_s$  包含自由常数, 故可设

$$t_s = \frac{1}{2} \frac{u_{ms} s}{t_s} \quad (6.44)$$

代入式(6.43)使方程简化, 再经两次积分得

$$F^2 + F = 1 \quad (6.45)$$

再积分得  $\int_0^F \frac{dF}{1 - F^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + F}{1 - F} = \text{Arth} F$

最后得  $F = \text{th} \left( \frac{1 - e^{-2}}{1 + e^{-2}} \right) \quad (6.46)$

由此得流速  $u = u_{ms} \left( \frac{x}{s} \right)^{-1/2} (1 - \text{th}^2) \quad (6.47)$

特征断面的轴线流速  $u_{ms}$  可通过单宽射流的动量通量守恒条件推求, 动量通量为  $M = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dy$ , 完成积分后得  $M = \frac{4}{3} u_{ms}^2 \frac{s}{x}$ 。引入  $K = M/x$ , 最后可得流速分布表达式:

$$u = \frac{3}{2} \frac{K}{x} (1 - \text{th}^2) \quad (6.48)$$

$$v = \frac{3}{4} \frac{K}{x} 2 (1 - \text{th}^2) - \text{th}$$

上述理论分析结果和实验资料比较如图 6.17 所示。在射流中间大部分区域两者是符合的。从实验资料定出  $K = 7.67$ 。如令  $b_{\frac{1}{2}}$  表示  $u =$

图 6.17<sup>[3]</sup>

$u_m/2$  处的射流半厚度则有

$$\delta = \frac{1.125}{4} b_2^{1/2} u_m$$

将上述 值代入得到

$$\delta = 0.037 b_2^{1/2} u_m \quad (6.49)$$

### 三、圆形断面自由紊动射流的动量积分解

圆形断面喷口的射流是生产实践中最常见的。本节讨论无限空间静止流体中等密度的圆形断面紊动射流, 故在流动过程中能保持轴对称的运动。

#### 1. 主体段的流动

和平面射流一样, 按流场压静分布的条件, 射流各断面动量通量守恒, 都等于出口断面的动量通量, 即

$$M = \int_0^{r_0} u^2 \rho 2\pi r dr = u_0^2 \pi r_0^2 \quad (6.50)$$

式中  $u_0$ 、 $r_0$  分别为出口断面的流速和半径, 设流速是均匀分布的 (图 6.18)。

图 6.18 圆形断面自由紊动射流

主体段各断面的流速分布存在相似关系:

$$\frac{u}{u_m} = f \frac{r}{b} \quad (6.51)$$

据实验资料仍可采用高斯分布:

$$u = u_m \exp - \frac{r^2}{b^2} \quad (6.52)$$

并取  $b_e$  作为特性半厚度, 代入式(6.50)求积分

$$\begin{aligned} \int_0^{b_e} u^2 2r dr &= 2 u_m^2 \int_0^{b_e} \exp^2 - \frac{r^2}{b_e^2} r dr \\ &= 2 u_m^2 \int_0^{b_e} \exp - \frac{2r^2}{b_e^2} d \frac{2r^2}{b_e^2} \\ &= \frac{1}{2} u_m^2 b_e^2 \end{aligned}$$

则式(6.50) 成为  $\frac{1}{2}(u_m^2 b_e^2) = u_0^2 \frac{D^2}{4} \quad (6.53)$

设射流厚度线性扩展  $b_e = x$ , 代入上式得

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{1}{2} \frac{D}{x} \quad (6.54)$$

任意断面的流量

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^{b_e} u \cdot 2\pi r dr = 2\pi u_m \int_0^{b_e} \exp\left(-\frac{r^2}{b_e^2}\right) r dr \\
 &= 2\pi u_m \frac{b_e^2}{2} \left[ -\exp\left(-\frac{r^2}{b_e^2}\right) \right]_0^{b_e} \\
 &= \pi u_m b_e^2
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

出口流量  $Q_0 = u_0 \frac{D^2}{4}$

故流量比为  $\frac{Q}{Q_0} = \frac{\pi u_m b_e^2}{\frac{1}{4} u_0 D^2} = \frac{4\pi u_m b_e^2}{D^2 u_0}$

以式(6.54)代入得

$$\frac{Q}{Q_0} = 2 \frac{x}{D} \tag{6.56}$$

根据阿尔伯逊等实验资料得  $\frac{Q}{Q_0} = 0.114$ , 则

$$b_e = 0.114x \tag{6.57}$$

$$\frac{u_m}{u_0} = 6.2 \frac{D}{x} \tag{6.54a}$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.32 \frac{x}{D} \tag{6.56a}$$

并推得卷吸系数  $\alpha = 0.056$  (6.58)

当  $u_m = u_0$ , 得到势流核心区末端的源点距

$$x = 6.2D$$

有资料得出轴对称紊动射流源至喷口的距离为  $0.6D$ , 则射流起始段的长度为

$$L_0 = 6.8D \tag{6.59}$$

也有近似采用  $L_0 = 6.2D$  (6.59a)

阿勃拉摩维奇对于轴对称自由紊动射流也作了详细的研究, 他建议的主体段轴线流速关系式为

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{0.96}{\frac{as}{r_0} + 0.29} \quad (6.60)$$

实验系数  $a = 0.07 - 0.08$ 。

各家研究者对轴对称紊动射流主体段的轴线流速的表达式可概括为

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{C_3}{\frac{s}{D} + C_4} \quad (6.61)$$

拉贾拉南建议实用上可取  $C_3 = 6.3, C_4 = 0$ , 则

$$\frac{u_m}{u_0} = 6.3 \frac{D}{s} \quad (6.62)$$

## 2. 起始段的流动

起始段的边界层混合区的流速分布也可采用高斯分布的形式:

$$u = u_0 \exp - \frac{(r - b_c)^2}{b_m} \quad (6.63)$$

式中  $b_c$  为势流核心区的半径。阿勃拉摩维奇书中对轴对称射流的起始段流动也有详细的分析, 这里不再详述。

## 3. 射流中标志物质的浓度分布

在静止及无标志物质的流体中扩展的轴对称射流, 标志物质的浓度分布也可采用高斯分布形式, 写为:

$$\text{在主体段} \quad c = c_m \exp - \frac{r^2}{b_c} \quad (6.64) \quad \text{在起始段混合层}$$

$$c = c_0 \exp - \frac{(r - b_c)^2}{(b_m)^2} \quad (6.65)$$

实验求得  $\frac{c_m}{c_0} = 1.12$ .  $c_0$  为出口断面的浓度。

对标志物质应用物质守恒定律, 射流任意断面标志物质的通量应等于出口断面的相应值, 在主体段可写为:



$$\int_0^{\infty} c u \sqrt{2} r dr = c_0 u_0 \sqrt{2} \frac{D^2}{4} \quad (6.66)$$

以式(6.64)及式(6.52)代入计算上式积分

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} c u \sqrt{2} r dr &= 2 \int_0^{\infty} c_m \exp\left(-\frac{r}{b_e}\right)^2 u_m \exp\left(-\frac{r^2}{b_e^2}\right) \frac{1}{2} d(r^2) \\ &= \frac{2}{1 + \frac{2}{b_e^2} c_m u_m b_e^2} \end{aligned} \quad (6.67)$$

考虑线性扩展关系  $b_e = x$ , 再代入式(6.66), 最后得

$$\frac{c_m}{c_0} = \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{2} \frac{D}{x} \quad (6.68)$$

以  $\frac{c_m}{c_0} = 1.12$ ,  $\frac{D}{x} = 0.114$  代入上式得

$$\frac{c_m}{c_0} = 5.59 \frac{D}{x} \quad (6.69)$$

#### 四、圆形断面自由紊动射流的微分方程解

仍应用边界层理论, 在轴对称定常情况下微分方程组为式(3.17) ~ (3.19)。对于自由淹没紊动射流,  $\frac{D}{x} = 0$ , 粘性切应力项也可忽略, 基本微分方程组成为:

$$u \frac{v}{x} + v_r \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{1}{r} (-r \overline{u v_r}) \quad (6.70)$$

$$\frac{u}{x} + \frac{1}{r} \frac{1}{r} (r v_r) = 0 \quad (6.71)$$

各家学者解这个方程组曾应用各种紊流切应力模型, 在时均流模型中有图尔曼采用混合长度理论; 施利希廷(Schlichting, H.) 采用普朗特自由紊流新理论; 以及阿勃拉摩维奇等人的工作。下面介绍施利希廷的方法<sup>[3]</sup>。他将雷诺应力项表示如下:

$$- \overline{u v_r} = \tau \frac{u}{r} \quad (6.72)$$

则式(6.70)成为

$$u \frac{u}{x} + v_r \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \nu \frac{du}{dr} \right) \quad (6.73)$$

对静止流体中的紊动射流, 采用普朗特的自由紊流理论有

$$\nu = b u_m \quad (6.74)$$

同时考虑  $b \propto x$ , 及  $u_m \propto \frac{1}{x}$  的关系, 则

$$\nu \propto x \cdot \frac{1}{x} = x^0$$

故沿流  $\nu = \text{const}$ , 表示为  $\nu_0$  表明在整个射流中涡粘性系数保持为常数。

流动的边界条件为:

$$r = 0 \text{ 处} \quad v_r = 0 \quad \frac{du}{dr} = 0$$

$$r = \infty \text{ 处} \quad u = 0$$

设断面上流速分布是相似的, 令  $\eta = \frac{r}{x}$ , 并引入流函数  $\psi = \nu_0 x F(\eta)$ , 则流速分量为

$$u = \frac{\nu_0}{x} \frac{d^2 F}{d\eta^2} \quad (6.75)$$

$$v_r = \frac{\nu_0}{x} \left( F - \eta \frac{dF}{d\eta} \right)$$

代入式(6.73)得

$$\frac{F F''}{2} - \frac{F'^2}{2} - \frac{F F'''}{2} = \frac{d}{d\eta} \left( F' - \frac{F}{\eta} \right) \quad (6.76)$$

边界条件为  $\eta = 0$  时,  $F = 0, F' = 0$ 。

积分式(6.76)一次得

$$F F' = F' - F \quad (6.77)$$

上式满足边界条件的一个特解为

$$F = \frac{\eta^2}{1 + \eta^2/4} \quad (6.78)$$

因而从式(6.75)可得

$$u = \frac{\nu_0}{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \frac{dF}{dx} \right) = \frac{\nu_0}{x} \frac{2}{(1 + x^2/4)^2} \quad (6.79)$$

$$v_r = \frac{\nu_0}{x} \frac{dF}{dx} - \frac{F}{x} = \frac{\nu_0}{x} \frac{-3/4}{(1 + x^2/4)^2}$$

于是射流的动量通量

$$M = 2 \int_0^{\infty} u^2 r dr = \frac{16}{3} \nu_0^2 \quad (6.80)$$

最后,式(6.79)可写为以  $\nu_0$  及  $K = M/\nu_0$  表示的形式:

$$u = \frac{3}{8} \frac{K}{\nu_0 x} \frac{1}{(1 + x^2/4)^2} \quad (6.81)$$

$$v_r = \frac{1}{4} \frac{3}{x} \frac{K}{\nu_0} \frac{-3/4}{(1 + x^2/4)^2}$$

式中 
$$= \frac{1}{4} \frac{3}{\nu_0} \frac{K}{x} \frac{r}{x} \quad (6.82)$$

轴线流速( $r = 0$ )为 
$$u_m = \frac{3}{8} \frac{K}{\nu_0 x} \quad (6.83)$$

流量为 
$$Q = 2 \int_0^{\infty} u r dr = 8 \nu_0 x \quad (6.84)$$

和距离成正比关系。

由于  $\nu_0$  是个常数,则对于层流型射流,只需将  $\nu_0$  改为运动粘性系数,上述结果都可成立。

按赖夏特(Reichardt)的实验, $u = u_m/2$  处的射流半径为

$$b_{1/2} = 0.0848x$$

该处  $u = 1.286 u_m$ , 而  $b_{1/2} = 5.27x \nu_0 / K$ , 故得

$$\nu_0 / K = 0.0161$$

另一方面由圆形射流的动量积分有

$$\overline{K} = 1.59b_2^{\frac{1}{2}}u_m$$

因此得

$$t_0 = 0.0256b_2^{\frac{1}{2}}u_m$$

同时代入式(6.84)得

$$Q = 0.404 \overline{K} x \quad (6.84a)$$

流量比 
$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{0.404 \overline{K} x}{r_0^2 u_0} = 0.228 \frac{x}{r_0}$$

和式(6.56a)比较偏大些。

希因斯(Hinze, J. O.)从相同的边界层方程及边界条件出发,求得流速分布的另一关系式:

$$\frac{u}{u_m} = \frac{1}{(1 + u_m r^2 / 8 t_0 x)^2} \quad (6.85)$$

并认为如取

$$t_0 = 0.00196x u_m \quad (6.86)$$

图 6.19 圆形断面自由紊动射流的流速分布<sup>[6]</sup>

则和实验资料很符合,见图 6.19<sup>[6]</sup>。代入式(6.85)得

$$\frac{u}{u_m} = \frac{1}{(1 + r^2 / 0.016x^2)^2} \quad (6.87)$$

## 五、矩形断面喷口的自由紊动射流

矩形断面喷口的射流是三维射流的一种典型。虽然在实际中有不少应用,但由于现象较复杂,研究成果尚不多,60年代以来,实验方面有史福沙(Sforza, P. M.), 叶夫杰维奇(Yevdjevitch, V. J.), 斯费尔(Sfeier)等人的工作,近年麦古克(Mc Guirk, J. J.)和洛迪(Rodi, W.)用紊流  $k-\epsilon$  二方程模型进行过计算,取得一定的成果。

图 6.20 矩形断面喷口的自由射流

取出口断面为  $y-z$  平面,射流轴线与  $x$  轴重合如图 6.20 所示。出口喷口断面宽度为  $b_0$ ,高度为  $a_0$ ,宽高比表示为  $e = b_0/a_0$ 。射流出口后向  $y$  及  $z$  两个侧向扩展,成为三维的流动。从实验得知这种射流运动有下面一些特点。

整个射流按其轴线流速变化规律的不同可分为三个区:出口后和二维射流一样也有一个速度不变的势流核心区;然后轴线流速  $u_m$  大体上按平面射流的规律减小,即和  $x^{-1/2}$  成比例;经过一定距离后逐渐过渡转变为近似按圆形断面射流的规律变化,即  $u_m \propto x^{-1}$  (图 6.21)。宽高比  $e$  愈大,出现圆形断面射流的规律愈靠后。

在侧向扩展方面,沿短轴( $y$  方向)是从出口开始射流厚度逐渐增大的;沿长轴( $z$  方向)射流的宽度则是从出口开始先逐渐缩

小, 然后才逐渐扩宽的, 图 6.22 中  $\frac{Z^{1/2}}{a_0} \sim \frac{X}{a_0}$  曲线的变化趋势即表明如此。

图 6.21 矩形断面射流的轴线流速<sup>[22]</sup>

图 6.22 矩形断面射流的侧边扩展<sup>[22]</sup>

射流断面上的流速分布,由图 6.23 中不同 $\frac{x}{a_0}$ 的断面 $\frac{u}{u_m} \sim \frac{y}{x}$ 的实验点子基本上在同一条曲线上即表明,在射流轴线上各点沿  $y$  方向的流速分布基本上相似。至于沿  $z$  方向的流速分布则看不出明显的相似,而且在较近区域内最大流速不在轴线上,出现马鞍形(见图 6.24)。关于这些现象的原因还不能作出明确的解释。有人认为是射流断面上存在次流所致,进一步的分析有待于对喷口处流动内部结构的研究。

图 6.23 矩形断面射流在  $y$  方向的流速分布<sup>[22]</sup>

图 6.24 矩形断面射流在  $z$  方向的流速分布<sup>[22]</sup>

麦古克和洛迪应用紊流的  $k-\epsilon$  二方程模型对矩形断面射流做了计算<sup>[22]</sup>,介绍如下。

对大雷诺数的三维射流应用三维边界层型的运动方程和连续方程作为控制流动的基本方程:

$$\frac{\overline{u^2}}{x} + \frac{\overline{uv}}{y} + \frac{\overline{uw}}{z} = - \frac{\overline{uv}}{y} - \frac{\overline{uw}}{z} \quad (6.88)$$

$$\frac{\overline{uv}}{x} + \frac{\overline{v^2}}{y} + \frac{\overline{vw}}{z} = - \frac{1}{y} \frac{p}{y} - \frac{\overline{v^2}}{y} - \frac{\overline{vw}}{z} \quad (6.89)$$

$$\frac{\overline{uw}}{x} + \frac{\overline{vw}}{y} + \frac{\overline{w^2}}{z} = - \frac{1}{z} \frac{p}{z} - \frac{\overline{vw}}{y} - \frac{\overline{w^2}}{z} \quad (6.90)$$

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0 \quad (6.91)$$

对于边界层型的射流运动,沿流向动量的紊动扩散可忽略,故在方程(6.88)至(6.90)中没有雷诺应力对  $x$  的梯度项。因是针对静止或等速的流体中的射流,故在方程(6.88)中忽略  $p/x$  项。同时也略去粘性应力项。

紊流模型采用  $k$ - $\epsilon$  二方程模型,  $k$  是紊动动能,  $\epsilon$  是能量耗散率。这个模型的雷诺应力表示为

$$-\overline{u_i u_j} = \epsilon \left( \frac{\overline{u_i}}{x_j} + \frac{\overline{u_j}}{x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (6.92)$$

$\epsilon$  为涡粘性系数。 $\epsilon$  和  $k$  的关系表示为

$$\epsilon = C_\mu \frac{k^2}{L} \quad (6.93)$$

$C_\mu$  是经验常数。在流场中  $k$  和  $\epsilon$  的分布按下列半经验的传输方程计算:

$$\begin{aligned} & \frac{uk}{x} + \frac{vk}{y} + \frac{wk}{z} \\ &= \frac{1}{y} \frac{\epsilon}{k} \frac{k}{y} + \frac{1}{z} \frac{\epsilon}{k} \frac{k}{z} + G - \\ & \frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} \end{aligned} \quad (6.94)$$



$$= \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \frac{1}{z} + C_1 \frac{G}{k} - C_2 \frac{1}{k} \quad (6.95)$$

式中  $G = \frac{u^2}{y} + \frac{u^2}{z}$  (6.96)

是紊动能量的产生率。 $k$ 、 $C_1$  和  $C_2$  都是经验常数, 这些常数值采用:

$$C_\mu = 0.09, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92, k = 1.0, \sigma = 1.3$$

(见 3.5 节)。但由于上述  $C_1$  值给出计算成果和实验符合不好, 而修改为

$$C_1 = 1.14 - 5.31 \frac{y/2}{u_m} \frac{du_m}{dx} \quad (6.97)$$

式中右边第二项为一滞延系数, 其值在平面射流为 -0.055, 在圆形断面射流为 -0.087。式(6.97)只适用于周围流体是静止的情况。

关于边界条件, 流动有两个对称平面:  $x-y$  平面和  $x-z$  平面, 以及射流的自由边界。在对称平面上, 所有变量的法向梯度为零; 正交于该平面的侧向流速为零。在射流的自由边界,  $u$ 、 $k$  和  $\epsilon$  值均为零; 平行于边界的侧向流速为零; 正交于边界的流速其梯度为零。此外, 周围流体中的压强是常数。

在喷口处射流的起始断面, 固定  $u$ 、 $k$  和  $\epsilon$  值为均匀分布。取紊动水平低的  $k$  值。 $\epsilon$  值需经过调整, 用测得的起始段长度和起始能量衰减率校核至符合实验结果为止。起始断面的  $z$  方向的侧向流速  $\overline{w_0}$  的影响问题, 按不计侧向流速考虑, 计算结果在宽高比  $e$  大时和实验符合不好, 但当计入  $\overline{w_0}$  的作用即能较好地符合实验结果。由于  $\overline{w_0}$  无实测资料, 计算时假定  $\overline{w_0}$  在轴线为零, 线性增加至  $z = b_0/2$  处为最大  $\overline{w_{0m}}$ , 而与  $y$  无关。最大的侧向流速比  $\overline{w_{0m}}/\overline{u_0}$  值: 在宽高比  $e = 10$ , 取 0.125;  $e = 20$ , 取 0.15。

解方程用数值算法, 在电子计算机上进行, 以帕坦卡

(Patankar, S. V.) 和史泊丁 (Spalding, D. B.) 的程序为基础。计算结果用轴向动量通量的总值校核。计算网格包含射流的全范围, 轴向约算至距离  $150a_0$  处。在  $y$  方向有 12-17 个结点, 在  $z$  方向有 12-22 个结点, 最大步长约为  $y$  方向射流厚度的 8%。对  $e=1, 5, 10, 20$  几种方案作了计算, 其成果和前人实验资料的比较见图 6.21 至 6.24。计算和实验的一致性是较好的, 但对马鞍形的流速分布则未能算出。

这样, 对于矩形断面喷口的紊动射流, 虽然还有若干问题如起始断面的条件和流动结构等尚有待研究, 也难得出简单的计算关系式, 但已取得的上述资料, 在实际工作中还是可以参考应用的。

例题 6.1 设用排污管将污水排入湖中, 污水流量为  $Q_0 = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$ , 污水管出口在湖面下 15m。污水垂直向上排泄, 污水出流浓度为 1000ppm。密度和湖水的差别可忽略不计。在保持出口流速为  $1.0 \text{ m/s}$  的条件下, 试比较下列两种排放方案中湖水面的最大浓度, 轴线稀释度和平均稀释度。(1) 采用单孔排放, 并确定喷口直径。(2) 用互不干扰的多孔排放, 孔数为 16 个, 确定孔口直径和最小孔距。

[解] 已知  $Q_0 = 0.125 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  
 $u_0 = 1.0 \text{ m/s}$ ,  $c_0 = 1000 \text{ ppm}$ 。  
 喷口在水面下 15m。

(1) 单孔排放

$$Q_0 = \frac{\pi}{4} D^2 u_0, D \text{ 为喷口直径。}$$

$$D = \frac{\sqrt{Q_0 \cdot 4}}{u_0} = \frac{\sqrt{0.125 \cdot 4}}{1.0} = 0.159 \quad 0.4 \text{ m}$$

到达湖面时射流轴线最大浓度, 按式(6.69)计算

$$c_m = 5.59 \frac{D}{x} \cdot c_0 = 5.59 \times \frac{0.4}{15} \times 1000 = 149 \text{ ppm}$$

轴线稀释度  $S_m = \frac{c_0}{c_m} = \frac{1000}{149} = 6.7。$

平均稀释度  $S = \frac{Q}{Q_0} = 0.32 \frac{x}{D}$  [按式(6.56a)]  
 $= 0.32 \times \frac{15}{0.4} = 12。$

(2) 多孔排放

采用 16 个孔, 每孔污水流量

$$Q_1 = \frac{Q_0}{n} = \frac{0.125}{16} = 0.0078 \text{m}^3/\text{s}$$

孔口直径  $D_1 = D \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{1}{16} D = \frac{1}{4} \times 0.4 = 0.1 \text{m}$

湖面最大浓度

$$C_m = 5.59 \frac{D_1}{x} i^{\alpha} c_0$$

$$= 5.59 \frac{0.1}{15} \times 1000$$

$$= 37 \text{ppm}$$

轴线稀释度

$$S_m = \frac{c_0}{c_m} = \frac{1000}{37} = 27$$

平均稀释度

$$S = \frac{Q}{Q_0} = 0.32 \times \frac{x}{D_1} = 0.32 \times \frac{15}{0.1} = 48$$

可见多孔排放比单孔排放稀释度提高 4 倍。

为保证各股射流互不干扰, 最小孔口中心距  $e$  为

$$e = 2 x \cdot \text{tg} + \frac{D_1}{2}, \text{ 为到射流边缘的扩散角, 则 tg 比}$$

$$= 0.114 \text{ 要大些。设取 tg} = 0.13, \text{得}$$

$$e = 2 \times 15 \times 0.13 + \frac{0.1}{2} = 2 \times 2 = 4 \text{m}。$$

例题 6.2 图 6.25 为一环形喷口的顶视和剖面图。试推导喷出的自由紊动射流主体段的断面最大流速沿程变化的关系式。

图 6.25 例题 6.2 附图 环形喷口的自由射流

[解] 取坐标原点在环形喷流器中心, 其他符号意义如附图所示。

环形喷口断面的起始动量通量为

$$M_0 = \int_{A_0} u^2 dA = 4 r_0 b_0 \int_0^{2\pi} u_0^2 d\alpha = 4 r_0 b_0 u_0^2 \int_0^{2\pi} d\alpha = 8\pi r_0 b_0 u_0^2$$

在喷出的辐状射流主体段内, 取半径为  $r$  处的环形断面, 其动量通量为  $M(r) = \int_A u^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^r u^2 r dr d\alpha$ 。

设射流主体段断面上流速分布为  $\frac{u}{u_m} = f(\frac{r-r_0}{b_e})$ ,  $b_e = \frac{Z}{b_0}$ 。代入上式得

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^r u_m^2 f^2(\frac{r-r_0}{b_e}) r dr d\alpha = 2 r u_m^2 b_e \int_0^{2\pi} f^2(\frac{r-r_0}{b_e}) d\alpha \\ &= 4 r b_e u_m^2 \int_0^{2\pi} f^2(\frac{r-r_0}{b_e}) d\alpha \quad I = \int_0^{2\pi} f^2(\frac{r-r_0}{b_e}) d\alpha \end{aligned}$$

由动量守恒关系,  $M(r) = M_0$ , 并设射流扩展关系  $b_e = (r - r_0)$  可得

$$r \int_0^{2\pi} (r - r_0) u_m^2 I = r_0 b_0 u_0^2 \int_0^{2\pi} d\alpha$$

故得断面最大流速沿程变化式

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{b_0 r_0}{r(r - r_0) I}^{1/2}$$

如取  $f(z) = \exp - \frac{z^2}{b_e^2}$  , 则  $I = \int_0^z \exp - 2 \frac{z^2}{b_e^2} dz = \frac{1}{2} \frac{1}{b_e} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{b_e}$  最后得

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{2 \sqrt{2} b_0 r_0}{r(r - r_0)^{1/2}}$$

### 6.3 浮力羽流

由于浮力作用产生的流体运动最常见的是从热源发生的气流。邻近热源的气体受热而体积膨胀, 密度减小, 相对于周围大气来说出现局部的密度差, 从而产生重力差, 即浮力作用和压强梯度, 促使受热流体上升, 形成对流。日常生活中看到的香烟的烟气和火焰上的气流都是这种流动的例子。受浮力作用产生的流动不限于气体, 如电厂排出的热水在河、湖冷水中的流动, 淡水在盐水中的流动等, 也因存在密度差而受到浮力的作用。

受浮力作用的流动因产生浮力的源的情况不同而有差别。如果浮力源的作用是瞬时的, 例如爆炸释放出的一股热气, 则后面的流动是非定常的, 即所谓热泡(thermal)。但如果浮力源的作用是持续定常的, 则会形成一种定常状态的流动, 这时流体受到的垂向浮力、侧边剪切力(阻力)和迁移加速度相应的惯性力将构成局部的平衡。这种由于定常浮力源作用而产生的一股流体运动常呈现羽状, 故称为浮力羽流(plume), 简称浮羽流, 对于气体有称为烟流。又因为它在流动中卷吸周围流体共同前进, 也称为卷流。本节只讨论浮羽流, 并限于静止环境的情况。

实际问题中带有浮力的泄流如烟囪的排气、冷却水的排放等, 多数情况在离开排放口较远的距离以后, 均趋近于浮羽流的性质,

因此, 讨论浮羽流的运动是有实际意义的。

## 一、浮羽流的基本方程与求解

### 1. 点源浮羽流

在静止环境中从点源发生的浮羽流具有轴对称流动的性质如图 6.26 所示。分析时采用圆柱坐标系, 轴向坐标为  $z$ , 径向坐标为  $r$ 。考虑定常流动, 控制流动的基本方程如下。

图 6.26 点源浮羽流

#### (1) 连续方程

$$\frac{w}{z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rw) = 0 \quad (6.98)$$

#### (2) 动量方程

采用圆柱坐标的边界层方程, 同时考虑质量力只有重力, 忽略粘性阻力只保留紊动阻力(雷诺应力)项, 则动量方程为

$$w \frac{w}{z} + v_r \frac{w}{r} = -g - \frac{1}{z} \frac{p}{z} - \frac{1}{r} \frac{1}{r} (\overline{r w v_r}) \quad (6.99)$$

设周围流体的压强在垂向为静压分布, 即  $\frac{p}{z} = -\rho_a g$ ,  $\rho_a$  为周围流体的密度。

则上式中  $-g - \frac{1}{z} \frac{p}{z} = -g \frac{\rho - \rho_a}{\rho_a}$

因密度差不大, 采用布辛涅斯克近似, 除带  $g$  的重力项外, 其他各项都不考虑密度变化的影响, 则上式中分母可用  $\rho_a$  代替, 式 (6.99) 成为

$$w \frac{w}{z} + v_r \frac{w}{r} = - \frac{(\rho - \rho_a)}{\rho_a} g - \frac{1}{r} \frac{1}{r} (\overline{r w v_r}) \quad (6.100)$$

### (3) 含有物或热量的守恒方程

令  $c$  表示浮羽流中含有物的浓度, 写出圆柱坐标的定常紊流中的扩散关系式:

$$w \frac{c}{z} + v_r \frac{c}{r} = - \frac{1}{r} \frac{1}{r} (\overline{r w c}) \quad (6.101)$$

如浮羽流中某点含有物的浓度与周围环境含有物浓度之差为  $c$ , 则扩散关系式可写为

$$w \frac{c}{z} + v_r \frac{c}{r} = - \frac{1}{r} \frac{1}{r} (\overline{r w c}) \quad (6.102)$$

对热量守恒, 表示浮羽流中某点的温度  $T$  与周围环境的温度  $T_a$  之差为  $T$ , 则可写热扩散的关系式:

$$w \frac{T}{z} + v_r \frac{T}{r} = - \frac{1}{r} \frac{1}{r} (\overline{r w T}) \quad (6.103)$$

### (4) 状态方程

流体密度和温度之间的关系可表示为

$$\rho = \rho_a + \frac{\rho_a}{T} (T - T_a) \quad (6.104)$$

对温差小的情况, 可设  $\frac{\rho}{T} \Big|_{T_a} = \text{const}$ , 式 (6.104) 成为线性关系

式:

$$- \rho_a = (\rho - \rho_a) \text{ 或 } \rho = \rho_a + \rho_a \frac{z}{H} \quad (6.105)$$

同样, 密度差和含有物浓度差也可设为线性关系, 即

$$c = c_a + \frac{z}{H} (c_0 - c_a) \quad (6.106)$$

上述控制方程组中包含有脉动量的二阶相关项  $\overline{w'v'r}$ ,  $\overline{w'c}$  等, 从理论上分析要求采用一定的紊流模型。在工程实用上则常采用一些合理的假定, 用积分方法求得表示浮羽流特性的各种参数的关系式, 其中一些待定系数则由实验确定。常用的假定有两个:

(1) 相似性假定 认为浮羽流各横断面上的流速分布、温度差或浓度差分布均各存在相似性。分布的图形有各种假定, 常用的为高斯分布, 即正态分布。按此假定可写

$$\text{流速分布} \quad w(z, r) = w_m e^{-\frac{r^2}{b^2}} \quad (6.107)$$

$$\text{浓度差分布} \quad c(z, r) = c_m e^{-\frac{r^2}{2b^2}} \quad (6.108)$$

$$\text{密度差分布} \quad (\rho - \rho_a)(z, r) = \rho_m e^{-\frac{r^2}{2b^2}} \quad (6.109)$$

式中  $w_m$ 、 $c_m$ 、 $\rho_m$  是断面中心的最大值;  $b$  为浮羽流断面的半厚度, 是按  $w/w_m = 1/e$  的位置定义的。从实验得知  $b$  是略大于 1 的系数, 表明浓度差或密度差的分布曲线比流速分布曲线要平坦些。

(2) 卷吸假定 认为浮羽流从侧边卷吸流体的径向流速  $v_e$  和浮羽流的特征流速成比例, 取浮羽流当地的断面中心最大流速  $w_m$  作为特征流速, 则单位长度浮羽流的卷吸流量为

$$Q_e = 2 b w_m \quad (6.110)$$

式中  $\alpha$  为卷吸系数。对于点源浮羽流可设  $\alpha$  为常数。

在这两个假定下可对控制方程积分如下。

从连续性考虑, 浮羽流沿程流量的增加是由于侧边卷吸的结果, 故  $z$  方向流量的增加率应等于卷吸流量, 即

$$\frac{d}{dz} \int_0^{\infty} w \rho \cdot 2 \pi r dr = Q_e \quad (6.111)$$



以式(6.107)代入上面积分得

$$\frac{d}{dz} \int_0^a w_m e^{-\frac{r^2}{b^2}} \rho_2 r dr = \frac{d}{dz} (w_m b^2)$$

将它和式(6.110)代入式(6.111)即得

$$\frac{d}{dz} (w_m b^2) = 2 w_m b \quad (6.112)$$

将动量方程(6.100)从  $r=0$  到  $r=a$  对断面积分, 并注意到当  $r=0$  和  $r=a$  时,  $v_r=0$ ,  $w|_{v_r=0}=0$ , 可得

$$\frac{d}{dz} \int_0^a w^2 \rho_2 r dr = \int_0^a \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} g \rho_2 r dr$$

式中左边是单位质量流体的动量通量的沿程变率, 右边是单位质量流体在单位流程上的浮力。以式(6.107)及式(6.109)代入上式, 积分并整理化简后可得

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{2} w_m^2 b^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} g \rho_2 b^2 \quad (6.113)$$

从物质守恒原理, 对密度差  $\rho_1 - \rho_2$  通量的积分也应存在守恒的关系:

$$\int_0^a (\rho_1 - \rho_2) g \rho_2 r dr = \text{const} \quad (6.114)$$

以式(6.107)、式(6.109)代入积分得

$$\frac{1}{1 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} w_m^2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} g \rho_2 b^2 = \text{const}$$

故有 
$$\frac{d}{dz} \frac{1}{1 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} w_m^2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} g \rho_2 b^2 = 0 \quad (6.115)$$

这样, 控制方程组就化为(6.112)、(6.113)和(6.115)三个常微分方程。解这组方程可求  $w_m$ 、 $b$  和  $\rho_1$ , 其中有两个待定系数和  $\rho_2$ 。

为解算时方便, 对单位质量流体来说的质量通量、动量通量和浮力通量分别定义为:

$$\text{比质量通量(即体积流量)} \quad Q = \int_A w dA \quad (6.116)$$

$$\text{比动量通量} \quad m = \int_A w^2 dA \quad (6.117)$$

$$\text{比浮力通量} \quad B = \int_A g_a w dA \quad (6.118)$$

对于上述圆形断面浮羽流,按上面(6.112)、(6.113)和(6.115)各式所得的积分结果可知

$$Q = w_m b^2 \quad (6.119)$$

$$m = \frac{1}{2} w_m^2 b^2 \quad (6.120)$$

$$B = \frac{1}{1 + \frac{2}{a}} w_m \frac{m}{a} g b^2 \quad (6.121)$$

由此有  $w_m = \frac{2m}{Q} \quad b = \frac{Q}{m} \frac{1}{2}$

代入式(6.112)、(6.113),控制方程组简化为

$$\frac{dQ}{dz} = 2 \frac{2m}{Q} \quad (6.122)$$

$$\frac{dm}{dz} = \frac{B(1 + \frac{2}{a})}{2} \frac{Q}{m} \quad (6.123)$$

由此可得  $\frac{d^2 m}{dz^2} = B(1 + \frac{2}{a}) 2 \frac{1}{2} m^{-1/2}$  (6.124)

因  $m(0) = 0$ , 可设  $m(z)$  的解为幂函数:

$$m(z) = az^n \quad (6.125)$$

代入式(6.124),取两边  $z$  的幂指数及系数各自相等,求得

$$m(z) = \frac{9}{40} A^{2/3} z^{4/3} \quad (6.126)$$

式中  $A = B(1 + \frac{2}{a}) 2 \frac{1}{2} = \text{const}$  (6.127)

因由式(6.115)知  $B$  是一个沿流不变的常数。由此可得

$$Q(z) = \frac{6}{5} \frac{9}{40} A^{1/3} z^{5/3} = \frac{6}{5} \frac{9}{40} m^{1/2} z \quad (6.128)$$

$$w_m = \frac{5}{3} \frac{1}{2} \frac{9}{40} A^{1/3} z^{-1/3} \quad (6.129)$$

$$b = \frac{6}{5} z \quad (6.130)$$

$$\begin{aligned} \frac{m}{a} g &= \frac{1 + \frac{2}{2}}{w_m b^2} = \frac{1 + \frac{2}{2}}{i \alpha \frac{B}{Q}} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{2}}{\frac{6}{5} \frac{9}{40} A^{1/3} B z^{-5/3}} \end{aligned} \quad (6.131)$$

从上面的结果可见浮羽流各参数沿流上升时与源点距离  $z$  有下列比例关系:

$$Q \propto z^{5/3}, m \propto z^{4/3}, w_m \propto z^{-1/3}, b \propto z, \frac{m}{a} \propto z^{-5/3}。$$

按上列  $b$  与  $z$  成线性关系, 这样从卷吸假定出发, 同样可得到浮羽流厚度作线性扩展的结果。同时还可看到  $Q$ 、 $m$ 、 $w_m$ 、 $\frac{m}{a}$  等都和  $B$  有关。而沿流  $B$  则是一个常数。

上面的分析是假定浮羽流从点源发生的。当实际浮羽流是从有限尺寸的源发生, 且起始各通量都不为零, 即  $Q_0 \neq 0, m_0 \neq 0$  时, 可用位于实际源下面的一个虚拟点源所发生的浮羽流的方程来描述。如  $Q(z) \approx Q_0, m(z) \approx m_0$ , 虚拟源和实际源的距离将远小于  $z$ 。对于强浮力的泄流, 上述浮羽流的解能给出较好的近似值, 对于这种情况, 可推求稀释度如下。

按定义,  $B_0$  可从起始断面的  $Q_0, \frac{m_0}{a}$  计算:

$$B_0 = Q_0 \frac{m_0}{a} g \quad (6.132)$$

而由式(6.121)、式(6.119)有

$$B = \frac{1 + \frac{2}{2}}{w_m \frac{m}{a} g b^2} = \frac{1 + \frac{2}{2}}{\frac{m}{a} g Q}$$

由式(6.115)  $\frac{dB}{dz} = 0$ , 则  $B = B_0$

故得 
$$\frac{1}{1 + \frac{2}{m} Q} = \frac{Q_0}{Q} \quad (6.133)$$

所以浮羽流中心的浓度差和起始浓度差之比为

$$\begin{aligned} \frac{c_m}{c_0} &= \frac{1}{1 + \frac{2}{m} Q} = \frac{1 + \frac{2}{m} Q_0}{1 + \frac{2}{m} Q} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{m} Q_0}{1 + \frac{2}{m} Q_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{m} (Q - Q_0)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{m} (Q - Q_0)} \end{aligned} \quad (6.134)$$

这个比值的倒数  $c_0/c_m$  就是中线稀释度  $S_m$ 。

根据劳斯(Rouse, H.)等人的实验资料, 取点源浮羽流的两个系数  $\alpha$  和  $\beta$  的值为  $\alpha = 0.085$ ,  $\beta = 1.16$ 。用这些系数值计算出点源浮羽流的特性参数如附表 6.1 所列。

表 6.1 浮羽流特性(断面上正态分布)

参 数	圆形断面浮羽流	平面浮羽流
起始比浮力通量 $B_0 = \frac{1}{A} \int_A g w dA$	量纲 [ $L^4 T^{-3}$ ]	量纲 [ $L^3 T^{-3}$ ]
体积流量 $Q = \int_A w dA$	$0.156 B_0^{1/3} z^{5/3}$	$0.535 B_0^{1/3} z$
比动量通量 $m = \int_A w^2 dA$	$0.37 B_0^{2/3} z^{4/3}$	$0.774 B_0^{2/3} z$
断面上最大时均流速 $w_m$	$4.74 B_0^{1/3} z^{-1/3}$	$2.05 B_0^{1/3}$
断面上最大时均浓度 $c_m$	$11.17 Q_0 C_0 B_0^{-1/3} z^{-5/3}$	$2.40 Q_0 C_0 B_0^{-1/3} z^{-1}$
浮羽流半厚度 $b$	$0.102 z$	$0.147 z$
扩展系数 $\beta = b/z$	0.102	0.147
浓度分布与速度分布的宽度比	1.16	1.24
卷吸系数	0.085	0.130
当地密度弗劳德数 $F_d$	4.45	3.48

(本表资料取自文献[23], 设周围环境中浓度为零, 故式(6.134)中的  $\frac{c_m}{c_0} = \frac{c_m}{c_0}$ , 表中列出  $c_m$  的表达式。)

还有一点须提出, 如定义当地密度弗劳德数(local densimetric Froude number)为

$$F_d(z) = \frac{W_m}{\frac{m}{a} g b} \quad (6.135)$$

它衡量惯性力与浮力之比, 将上面求得的有关值代入上式可得

$$F_d(z) = \frac{5}{4}^{1/2} \frac{W_m}{\frac{m}{a} g b} = \text{const} \quad (6.136)$$

说明在整个浮羽流中, 惯性力与浮力之比保持不变, 这是所有浮羽流的一个特性。

## 2. 线源浮羽流

从线源发生的浮羽流, 可作为二维流动分析。流动平面为  $y-z$  平面, 浮羽流源的坐标为  $z=0$ 。周围静止流体的密度为  $\rho_a$ 。运动是由定常的浮力维持。运动的控制方程为

$$\text{连续性方程} \quad w \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.137)$$

$$\text{动量方程} \quad w \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{\partial (w v)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \rho_a g \quad (6.138)$$

$$\text{浓度方程} \quad w \frac{\partial c}{\partial z} + v \frac{\partial c}{\partial y} = - \frac{\partial (w c)}{\partial y} \quad (6.139)$$

分析方法和点源浮羽流相同, 断面上各流动参数的变化采用正态分布, 对线源浮羽流取系数值  $\alpha = 0.13$ ,  $\beta = 1.24$ 。分析计算得出线源(平面)浮羽流的特性参数也列于表 6.1 中。

## 二、浮羽流的量纲分析解成果

李斯特(List, E. J.) 曾对浮羽流采用量纲分析的途径求解<sup>[24]</sup>。他考虑没有起始流量和起始动量的情况, 认为浮羽流的所有参数就只是起始浮力通量  $B_0$ 、源点距  $z$  和流体的两个特性系数  $\nu$  及  $K$  的函数,  $\nu$  是运动粘性系数,  $K$  是热扩散系数。例如对轴线时

均流速可写

$$w_m = f(B_0, z, \dots) \quad (6.140)$$

由量纲分析对点源发生的圆形断面浮羽流可得

$$w_m = \frac{B_0^{1/3}}{z} f \left( \frac{B_0^{1/3} z^{2/3}}{\dots} \right), \quad (6.141)$$

式中右边  $\frac{B_0^{1/3} z^{2/3}}{\dots}$  是当地雷诺数, 一是普朗特数(Prandtl number)。

对于源点距大, 浮羽流已达到充分发展紊动的流区, 可作流动自相似的假定, 并认为流体的分子性质的影响可以忽略, 则式(6.141)

右边的函数  $f \left( \frac{B_0^{1/3} z^{2/3}}{\dots} \right)$ , 一趋于一个极限常数  $k_R$ , 则

$$w_m = k_R (B_0/z)^{1/3} \quad (6.142)$$

同样由量纲推论可得

$$\text{体积流量} \quad Q = k_Q B_0^{1/3} z^{5/3} \quad (6.143)$$

$$\text{比动量通量} \quad m = k_m B_0^{2/3} z^{4/3} \quad (6.144)$$

$$\text{断面上最大浓度} \quad c_m = k_c Y B_0^{-1/3} z^{-5/3} \quad (6.145)$$

式中  $Y$  是浮羽流中示踪剂的总通量, 因而  $Y = c_0 Q_0$ ;  $k_R$ 、 $k_Q$ 、 $k_m$  和  $k_c$  都是相应系数。将以上各式和表 6.1 中相应参数的各式比较, 可看到其形式是完全相同的。

对于线源发生的平面浮羽流, 用同样的量纲分析方法可得到

$$w_m = k_p B_0^{1/3} \quad (6.146)$$

$$Q = k_Q B_0^{1/3} z \quad (6.147)$$

$$m = k_m B_0^{2/3} z \quad (6.148)$$

$$c_m = k_c Y B_0^{-1/3} z^{-1} \quad (6.149)$$

李斯特对各式的系数值推荐如表 6.2 所列。表 6.2 中各式的系数值和表 6.1 相比, 对于圆形断面浮羽流两者相近(除  $k_c$  外), 对于平面浮羽流两者相差较大, 李斯特解释其原因是对于平面浮羽流他采用了较新的 Kotsovinos(1975) 的实验成果, 对于圆形断面浮羽流还没有相应的新实验, 仍暂用 Rouse 等的实验成果的缘故。

表 6.2 浮羽流的量纲分析成果

参 数	圆形断面浮羽流	平面浮羽流
起始比浮力通量 $B_0$	量纲 $L^4T^{-3}$	量纲 $L^3T^{-3}$
断面上最大时均流速 $w_m$	$(4.7 \pm 0.2)B_0^{1/3}z^{-1/3}$	$1.66B_0^{1/3}$
断面上最大时均浓度 $c_m$	$(9.1 \pm 0.5)YB_0^{1/3}z^{-5/3}$	$2.38YB_0^{1/3}z^{-1}$
流量 $Q$	$(0.15 \pm 0.015)B_0^{1/3}z^{5/3}$	$0.34B_0^{1/3}z$
按流速分布的半厚度比 $b_w/z$	$0.100 \pm 0.005$	$0.116 \pm 0.002$
按浓度分布的半厚度比 $b_c/z$	$0.120 \pm 0.005$	$0.157 \pm 0.003$
断面上最大浓度与平均浓度比 $c_m/c_{av}$	$1.4 \pm 0.2$	$0.81 \pm 0.1$
$C_p$	0.25	0.29
理查森数 $R_p$	0.55	0.735

(本表资料取自文献[10])

此外,还可引出两个有意义的浮羽流不变量如下。

对于圆形断面浮羽流,从(6.143)、(6.144)两式消去  $B_0$  得到

$$\frac{Q}{m^{1/2}} = \frac{k_Q}{k_m^{1/2}}z \quad (6.150)$$

由此引出一个浮羽流的不变量:

$$C_p = \frac{k_Q}{k_m^{1/2}} = \frac{Q}{m^{1/2}z} \quad (6.151)$$

同样,从(6.143)、(6.144)两式消去  $z$  得到另一个浮羽流的不变量

$$R_p = \frac{QB_0^{1/2}}{m^{5/4}} \quad (6.152)$$

$R_p$  称为浮羽流的理查森数(Richardson number),其物理意义是浮力和惯性力作用的对比。

对于平面浮羽流,同理可得

$$C_p = \frac{Q^2}{mz} \quad (6.153)$$

$$R_p = \frac{Q^2 B_0^{2/3}}{m^2} \quad (6.154)$$

$C_p$  和  $R_p$  的值根据实验资料也列于表 6.2 中。

## 6.4 自由紊动浮射流

在 6.2 节介绍了动量射流, 上节又讨论了浮力羽流, 但在环境工程的废水、废气排放和工业冷却水排放中的射流, 当出射的起始密度  $\rho_0$  小于周围环境流体的密度  $\rho_a$  时, 就受到浮力的作用, 称为浮射流(buoyant jets)。浮射流的原动力既有动量也有浮力, 是介于动量射流和浮羽流之间的情况。

动量表征的惯性力与浮力的比例对射流运动起决定性的作用, 这两种力的对比, 即其相对作用可以下列密度弗劳德数(densimetric Froude number)衡量:

$$F_d = \frac{u}{\frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a} g L} = \frac{u}{g^* L} \quad (6.155)$$

式中  $u$  为射流的特性流速,  $L$  为射流的特性长度,  $\rho_0$  为射流的密度,  $\rho_a$  为周围流体的密度,  $g$  为重力加速度,

$$g^* = \frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a} g = \frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a} g \quad (6.156)$$

称为折减重力加速度。密度弗劳德数大时, 惯性力起主导作用, 因此射流出口的起始动量决定射流的性质, 其极限是出口断面的密度弗劳德数  $F_{d_0} = \infty$ , 浮力为零, 即为动量射流。反之, 当密度弗劳德数小时, 浮力起主导作用, 射流运动的性质主要由浮力决定, 其另一极限是  $F_{d_0} = 0$ , 即为浮力羽流。所以密度弗劳德数是分析变密度射流的一个重要的无量纲参数。

一般排泄出的废水或废气都有一定的出口流速, 也就是具有



一定的起始动量,在出口后的近区往往动量起主要作用,随着离开出口愈远,起始动量的作用愈小,至远区其性质就接近于浮羽流。

浮射流的问题比动量射流和浮羽流都要复杂些,用解析方法较难求得结果,因而常采用近似的数值解或由量纲分析结合实验成果进行归纳。近 20 多年国外在浮射流方面的研究有不少工作,但还没有一致的成果。下面针对无限空间均质流体中的自由紊动浮射流进行介绍,对于复杂条件下的浮射流将在以下各节作一定的补充。

## 一、自由紊动浮射流的积分方程及其数值解

### 1. 圆形断面的自由紊动浮射流

考虑在静止流体中一个圆形断面的倾斜浮射流,轴线在  $x-z$  平面上,对射流取  $n-s$  自然坐标系,  $s$  为从起始断面沿射流轴线的距离,如图 6.27 所示。

图 6.27 圆形断面浮射流

假定掺混机理和纯射流及浮羽流相同,因而可作相应的假定如下:

(1) 断面上流动特性参数的分布存在相似性,且设为正态分布:

$$u(s, n) = u_m(s) e^{-\frac{n^2}{b^2}} \quad (6.157)$$

$$c(s, n) = c_m(s) e^{-\frac{n^2}{2b^2}} \quad (6.158)$$

$$(s, n) = \quad m(s) e^{-\frac{n^2}{2b^2}} \quad (6.159)$$

(2) 卷吸假定——单位长度射流的卷吸流量为

$$Q_e = 2 b u_m \quad (6.160)$$

设浮射流轨迹的局部曲率小,不考虑曲率的影响,可认为运动的控制方程和上节浮羽流相同,将各方程在断面上积分,和上节相似可得下列各式。

(1) 连续方程 按卷吸假定有

$$\frac{dQ}{ds} = Q_e$$

则 
$$\frac{d}{ds}(u_m b^2) = 2 b u_m$$

或 
$$\frac{d}{ds}(u_m b^2) = 2 u_m b \quad (6.161)$$

(2) 水平方向动量方程 按守恒关系

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty u(u \cos \theta) 2 n dn = 0$$

以式(6.157)代入,忽略密度在断面上的变化,求得

$$\frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b^2}{2} \cos \theta = 0 \quad (6.162)$$

(3) 铅垂方向动量方程 沿 z 轴方向动量的改变率应等于密度差引起的浮力,即

$$\frac{d}{ds} \int_0^b u(u \sin \alpha)^2 n dn = \int_0^b (a - z) g \cos^2 \alpha n dn$$

以式(6.157)、(6.159)代入上式积分后可得

$$\frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b^2}{2} \sin^2 \alpha = \frac{m}{a} g \cos^2 \alpha b^2 \quad (6.163)$$

(4) 密度差通量守恒方程

$$\frac{d}{ds} \int_0^b u c \cos^2 \alpha n dn = 0$$

积分后得

$$\frac{d}{ds} (c_m u_m b^2) = 0 \quad (6.164)$$

(5) 含有物质守恒方程

$$\frac{d}{ds} \int_0^b c u \cos^2 \alpha n dn = 0$$

将式(6.157)、(6.158)代入上式积分后得

$$\frac{d}{ds} (c_m u_m b^2) = 0 \quad (6.165)$$

(6) 射流轨迹的几何关系:

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha \quad (6.166)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \alpha \quad (6.167)$$

上面式(6.161)至式(6.167)共 7 个常微分方程, 可求解 7 个未知量  $u_m$ 、 $c_m$ 、 $m$ 、 $b$ 、 $x$  和  $z$ 。它们的上游起始断面边界条件是:

$$\begin{aligned} u_m(0) &= u_0 & c_m(0) &= c_0 & m(0) &= m_0 \\ b(0) &= b_0 & (0) &= 0 & x(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.168)$$

但要全部求得解析解是不容易的。实用上大都是在具体给定条件下求近似数值解, 而且在解算之前常将方程无量纲化进行简化。方法很多, 下面介绍文献[23]采用的一个表达形式来说明。

先将式(6.162)和式(6.163)化成显式。为此将两式分别展开为

$$-\frac{u_m^2 b^2}{2} \sin \frac{d}{ds} + \frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b^2}{2} \cos = 0 \quad (6.162a)$$

$$\frac{u_m^2 b^2}{2} \cos \frac{d}{ds} + \frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b^2}{2} \sin = -\frac{m}{a} g^2 b^2 \quad (6.163a)$$

由式(6.163a)× sin + 式(6.162a)× cos, 并注意到  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ , 得

$$\frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b^2}{2} = -\frac{m}{a} g^2 b^2 \sin \quad (6.169)$$

同理, 由式(6.163a)× cos - 式(6.162a)× sin 可得

$$\frac{u_m^2 b^2}{2} \frac{d}{ds} = -\frac{m}{a} g^2 b^2 \cos \quad (6.170)$$

从式(6.165)可见, 只要求得  $u_m$ 、 $b$ , 即可确定  $c_m$ 。则联立求解方程组时可先不考虑  $c_m$ , 而只有 6 个方程和 6 个未知量。现今

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} & z^* &= \frac{z}{L} & s^* &= \frac{s}{L} \\ b^* &= \frac{b}{b_0} & u^* &= \frac{u}{U} & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_0} \end{aligned}$$

$L$  为特性长度,  $b_0$  为特性射流厚度,  $U$  为特性流速,  $\rho_0$  为特性密度差, 则方程(6.161)、(6.169)、(6.170)、(6.164)可改写如下:

$$\frac{U b_0^2}{L} \frac{d}{ds^*} (u_m^* b^{*2}) = 2 U b_0 (u_m^* b^*) \quad (6.171)$$

$$\frac{U^2 b_0^2}{L} \frac{d}{ds^*} \frac{u_m^{*2} b^{*2}}{2} = -\frac{\rho^*}{\rho_0} g^2 b_0^2 u_m^* b^{*2} \sin \quad (6.172)$$

$$\frac{U^2 b_0^2}{L} \frac{u_m^{*2} b^{*2}}{2} \frac{d}{ds^*} = -\frac{\rho^*}{\rho_0} g^2 b_0^2 (u_m^* b^{*2} \cos) \quad (6.173)$$

$$\frac{d}{ds^*} (u_m^* u_m^* b^{*2}) = 0 \quad (6.174)$$

如果恰当选择上述特性量  $L$ 、 $U$  等, 还可使方程进一步简化。

先看方程(6.171), 如令

$$\frac{U b_0^2}{L} = 2 U b_0 \quad (6.175)$$

即取  $L = b_0/2$  (6.176)

则方程(6.171)简化为

$$\frac{d}{ds^*} (u_m^* b^{*2}) = u^* b^* \quad (6.177)$$

同法如令  $U^2 = \frac{g^0}{a} L^2 = \frac{g^0}{a} \frac{b_0^2}{2}$  (6.178)

即  $U = \frac{g^0}{a} \frac{b_0^2}{2}^{1/2}$  (6.179)

方程(6.172)、(6.173)即简化为

$$\frac{d}{ds^*} \frac{u_m^* b^{*2}}{2} = u_m^* b^{*2} \sin \quad (6.180)$$

$$\frac{u_m^* b^{*2}}{2} \frac{d}{ds^*} = u_m^* b^{*2} \cos \quad (6.181)$$

这样, 式(6.174)、(6.177)、(6.180)、(6.181)就成为一组形式较简单的方程组。

在起始断面  $s = 0$ , 有  $u = u_0, b = b_0, u_m = u_0, u_m^* = u_0^*$ 。则  $b^* = 1, u_m^* = 1, u_m^* = \frac{u_0}{\frac{g^0}{a} b_0 \frac{b_0^2}{2}^{1/2}}$ 。当  $u_0$  为常数时, 整个问题就取

决于参数  $u_0$  和密度弗劳德数  $F_d = \frac{u_0}{\frac{g^0}{a} D^{1/2}}, D = 2b_0$ 。

范乐年和布洛克(Brooks, N. H.)采用类似的方法<sup>[25]</sup>, 取  $u_0 = 0.82, u_m^* = 1.16$  对  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  和  $90^\circ$  的圆形断面浮射流计算了不同  $F_{d_0}$  的轴线轨迹  $[x(s), z(s)]$ , 轴线稀释度  $S_m = c_0/c_m$  及射流无量纲半厚度  $b/b_0$  的值, 绘成一系列的曲线。现摘取一部分(改变了一些表达符号)如附图所示, 以供查用。其中图 6.28

(a), 6.28(b) 分别为  $\theta_0 = 0$  及  $45^\circ$  的情况, 用无量纲坐标  $2\sqrt{\frac{x}{D}}$  及  $2\sqrt{\frac{z}{D}}$  表示, 有两组曲线, 一组为以  $F_{d_0}$  为参变数的轨迹线, 另一组为等厚度线。由图可见, 对于达到相同高度的射流, 当  $F_{d_0}$  愈大时其轨迹愈长, 扩宽也愈大。不同  $F_{d_0}$  的射流最后都趋于垂直上升。图 6.28(c) 为  $\theta_0 = 90^\circ$  情况的射流相对增厚关系曲线, 以  $F_{d_0}$  为参变数, 曲线组表示射流相对高度  $z/D$  与相对厚度的关系。图 6.29(a)、6.29(b) 及 6.29(c) 为  $\theta_0 = 0^\circ, 45^\circ$  及  $90^\circ$  的射流轴线稀释度曲线, 对于给定的  $F_{d_0}$ , 按图可查出不同高度的轴线稀释度。

上面计算得到的曲线是设浮射流起始断面上流速、浓度等分布都和下游断面上的分布相似, 符合高斯分布。但实际上射流从喷口射出后要经历一段距离, 断面上才能达到高斯分布。设该段距离即为射流的起始段长度  $L_0$ , 忽略浮力影响把起始段看作直线, 当以喷口断面的参数为基准, 利用上述曲线计算时需作下列修正。

图 6.28(a)

图 6.29(c)

(1) 射流轨迹的坐标

当以喷口中心为原点的坐标系为

$x - oz$  , 应有

$$\begin{aligned}x &= x + L_0 \cos \theta \\z &= z + L_0 \sin \theta\end{aligned}\tag{6.182}$$

按前章近似取  $L_0 = 6.2D$ 。

(2) 射流厚度 从喷口断面与起始段末端断面间动量守恒

关系可推知

$$b_0 = D / \sqrt{2} \quad (6.183)$$

则

$$b/b_0 = \frac{b}{D/\sqrt{2}}$$

或

$$b = \frac{D}{2} \frac{b}{b_0} \quad (6.184)$$

即将曲线上查得的  $b/b_0$  值乘以  $D/\sqrt{2}$  便得射流半厚度。

(3) 轴线稀释比 令起始段末端断面上含有物质浓度为  $c_0$ , 喷口断面上为  $c_0$ , 从两断面含有物质的质量守恒关系可推得

$$c_0 = \frac{1 + \frac{2}{2}}{2} c_0 \quad (6.185)$$

上述曲线的稀释比  $s_m$  是以  $c_0$  为参考的,  $s_m = \frac{c_0}{c_m}$ 。如改用喷口断面

上的浓度  $c_0$  为参考值, 则  $s = \frac{c_0}{c_m}$ 。因此有

$$s = \frac{c_0}{c_0} s_m \quad (6.186)$$

将式(6.185)代入得

$$s = \frac{2}{1 + \frac{2}{2}} s_m \quad (6.187)$$

即从曲线查出的  $s_m$  值, 要乘以  $\frac{2}{1 + \frac{2}{2}}$  才是针对喷口断面的稀释比。

如取  $\frac{2}{1 + \frac{2}{2}} = 1.16$ , 则

$$s = 1.15 s_m \quad (6.188)$$



即稀释度值约增大 15%。

## 2. 平面二维自由紊动浮射流

从长方形断面窄缝喷出的浮射流,当宽度比厚度大得多时可作为二维流动,取单位宽度分析。采用上面分析圆形断面浮射流的假定,按同样的方法可得到平面二维浮射流的控制方程如下:

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{u_m^2 b}{2} \right) = 2 u_m \quad (6.189)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{u_m^2 b}{2} \cos \theta \right) = 0 \quad (6.190)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{u_m^2 b}{2} \sin \theta \right) = \frac{m}{a} g b \quad (6.191)$$

$$\frac{d}{ds} (u_m b) = 0 \quad (6.192)$$

$$\frac{d}{ds} (c u_m b) = 0 \quad (6.193)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (6.194)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \theta \quad (6.195)$$

射流起始断面有:

$$u_m(0) = u_0, c(0) = c_0, \theta(0) = \theta_0, b(0) = b_0, z(0) = z_0.$$

同样也可求得数值解。文献[25]中给出绘制好的实用图线,计算时采用的系数值:  $\alpha = 0.16$ ,  $\beta = 0.89$ 。  $\theta_0 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  的曲线如图 6.30 及图 6.31 所示。

按上述曲线计算平面浮射流也存在起始段的修正问题。和圆形断面浮射流同样分析,可得下列修正关系式。

(1) 以喷口中心为原点的射流轨迹坐标仍按式(6.182)计算, 但起始段长度  $L_0 = 5.2B$ ,  $B$  为喷口厚度。

(2) 起始段末端浮射流的半厚度为

图 6.30(a)、(b)

$$b_0 = \frac{\bar{z}}{2} B \quad (6.196)$$

则射流半厚度等于曲线上查得的  $b/b_0$  值乘以  $\frac{\bar{z}}{2} B$ 。

(3) 轴线稀释比 以喷口断面上的浓度  $c_0$  为参考浓度时, 稀释比为

$$s = \frac{\bar{z}^2}{1 + 2 S_m} \quad (6.197)$$

但用此式计算时, 取  $\bar{z} = 0.89$ , 会得出起始段末端断面浓度  $c_0$  大于喷口浓度  $c_0$  的矛盾。因而建议区分两种情况计算:

$$\text{当 } S_m \geq 1.06 \text{ 时 } \quad s = 0.94 S_m \quad (6.198)$$

$$\text{当 } S_m < 1.06 \text{ 时 } \quad s = S_m \quad (6.199)$$

例题 6.3 设一圆形断面排污管出口在海湾水面下 20m, 污水射流出口断面直径  $D = 0.2\text{m}$ , 出口流速  $u_0 = 3.0\text{m/s}$ 。污水与海水的相对密度差  $\frac{\rho_0}{\rho} = 0.025$ 。比较垂向出射 ( $\theta_0 = 90^\circ$ ) 与水平出射 ( $\theta_0 = 0^\circ$ ) 两种情况下, 浮射流达到水面的稀释度。

[解] 按静止环境中的浮射流计算, 应用图线求出口以上高度为  $z = 20\text{m}$  处的轴线稀释度。

出口密度弗劳德数

$$F_{d_0} = \frac{u_0}{\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} g D}} = \frac{3.0}{\sqrt{0.025 \times 9.8 \times 0.2}} = 13.64$$

$$2 \frac{\bar{z}}{2} \frac{z}{D} = 2 \frac{\bar{z}}{2} \times 0.082 \times \frac{20}{0.2} = 23.2$$

当  $\theta = 90^\circ$  时, 查图 6. 29(c) 得轴线稀释度  $S_m = 45$ 。修正至喷口断面的稀释度, 按式(6. 188) 为  $s = 1. 15S_m = 1. 15 \times 45 = 52$ 。

当  $\theta = 0^\circ$  时, 查图 6. 29(a) 得  $S_m = 55$ , 修正至喷口断面  $s = 1. 15S_m = 1. 15 \times 55 = 63$ 。

可见水平出射比垂向出射可得到较大的稀释度, 因为它比垂向出射有较长的射流轨迹, 卷吸效果更好些。但还是属于相同的量级。

## 二、自由紊动浮射流的量纲分析解

上述浮射流的近似解中有若干假定, 除射流断面上流速分布和浓度分布的自相似外, 还假定在卷吸过程中卷吸系数  $\alpha$  为常数。自相似对于浮射流是否存在也还未定论。对卷吸系数  $\alpha$  则更多的人认为不应是常数, 而和浮射流的局部密度弗劳德数有关。从实验资料看, 圆形断面浮羽流的  $\alpha_p$  值为 0. 085, 动量射流的  $\alpha_j$  值约为 0. 056, 则浮射流的  $\alpha$  值可能在两者之间变化。

因此, 不少人改从量纲分析的途径去探求浮射流主要参数的确定方法。目前比较常用的方法中不直接采用  $\theta_0$ 、 $u_0$ 、 $D$ 、 $c_0$  等参数表达射流出流起始断面上的流动特征, 而是采用单位质量流体的质量通量、动量通量和浮力通量, 即  $Q_0$ 、 $m_0$  和  $B_0$ , 它们的定义见(6. 116)、(6. 117)和(6. 118)各式。这样, 表征浮射流各种特性的变量都将是  $Q_0$ 、 $m_0$ 、 $B_0$ 、出射角  $\theta_0$  和坐标的函数

$$= f(Q_0, m_0, B_0, \theta_0, x, z) \quad (6. 200)$$

对于垂直向上的浮射流

$$= f(Q_0, m_0, B_0, z) \quad (6. 201)$$

采用  $Q_0$ 、 $m_0$  和  $B_0$  为自变量的考虑是它们各自代表射流起始喷出时的一项物理特性, 随着它们的数值大小不同, 射流的性质就有差异, 如当  $B_0 = 0$  为动量射流; 当  $Q_0 = 0$  为点源浮羽流。这样对分析问题有其优越性。

为了把问题进一步简化处理, 莫尔顿(Morton, B.) 首先引入

能综合反映上述基本参数的一种量纲为长度的特征尺度, 其后李斯特等人也采用这种方法, 现介绍如下。

对  $B_0 = 0$  的动量射流, 引入流量特征长度  $l_Q$  综合反映  $Q_0, m_0$ , 由量纲考虑有

$$l_Q = \frac{Q_0}{m_0^{1/2}} = \frac{\text{—}}{A_0} \quad (6.202)$$

$A_0$  为起始断面的面积。

对于圆形断面 
$$l_Q = \frac{\text{—}}{4} D \quad (6.202a)$$

对于矩形窄缝射流 
$$l_Q = 2b_0 \quad (6.202b)$$

即喷口断面厚度。这样, 射流的各种特性变量将是  $l_Q$  和  $z$  的函数。

李斯特综合各家研究资料对圆形断面射流得到: 轴线流速  $w_m$  衰减的无量纲关系如图 6.32, 可写为下式:

图 6.32 圆形断面射流轴线流速的衰减<sup>[10]</sup>

$$\frac{w_m}{w_0} = 7.0 \frac{l_0}{z} = 7.0 \frac{A^{\frac{1}{2}}}{z} \quad (6.203)$$

沿程流量增加的无量纲关系如图 6.33。当  $z/l_0$  较大时,  $Q/Q_0$  渐近于下列线性关系

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.25 \frac{z}{l_0} \quad (6.204)$$

图 6.33 圆形断面射流沿轴线的稀释度<sup>[10]</sup>

射流半厚度  $b$  沿流增加率平均为

$$\frac{b}{z} = 0.107 \pm 0.003 \quad (6.205)$$

其他特征量以及平面射流各特征量均可从资料整理得到相应的关系图式,可参考文献[10]。

对于浮射流,因有浮力作用,射流的动量将沿程递增,浮力和

动量的相对比重对射流性质的影响甚大。所以除上述特征长度  $l_0$  外, 还要引入另一个综合反映起始浮力  $B_0$  和起始动量  $m_0$  的特征长度  $l_m$ 。从量纲分析可知, 对圆形断面射流和平面射流, 这个特征长度的表达式是不同的。对圆形断面射流

$$l_m = \frac{m_0^{3/4}}{B_0^{1/2}} \quad (6.206)$$

对平面射流则为

$$l_m = \frac{m_0}{B_0^{2/3}} \quad (6.207)$$

这样, 浮射流各种特性的变量都将是  $l_0$ 、 $l_m$  和坐标的函数。例如, 对圆形断面射流的轴线流速  $w_m$ , 从量纲考虑可写

$$w_m = \frac{m_0^{1/2}}{z} f \frac{z}{l_m} = \frac{m_0^{1/2}}{z} f \frac{zB_0^{1/2}}{m_0^{3/4}} \quad (6.208)$$

讨论两种极限情况: 当  $\frac{z}{l_m} \gg 1$ , 即  $m_0$  很小,  $B_0$  大或  $z$  大时, 对于  $\frac{zB_0^{1/2}}{m_0^{3/4}}$ ,  $w_m$  应和  $m_0$  无关, 成为浮羽流性质, 要满足这个关系,

从式(6.208)可知  $f \frac{zB_0^{1/2}}{m_0^{3/4}} \frac{z}{l_m} = \frac{zB_0^{1/2}}{m_0^{3/4}} \frac{z}{l_m} \frac{2/3}{1/3}$ , 而有

$$w_m = \frac{B_0^{1/3}}{z} \quad (6.209)$$

当  $\frac{z}{l_m} \ll 1$ ,  $\frac{zB_0^{1/2}}{m_0^{3/4}} \ll 0$ ,  $w_m$  和  $B_0$  无关, 成为动量射流性质, 则

$f \frac{zB_0^{1/2}}{m_0^{3/4}} = \text{const}$ , 而有

$$w_m = \frac{m_0^{1/2}}{z} \quad (6.210)$$

由此可见  $l_m$  起到区分射流的性质是属于动量射流型还是浮羽流型的作用。

$l_0$  与  $l_m$  之比称为射流的理查森数 (the jet Richardson number)  $R_i$ , 即



$$R_i = l_Q/l_m \quad (6.211)$$

对于圆形断面射流,可表示为

$$R_0 = \frac{l_Q}{l_m} = \frac{Q_0 B_0^{1/2}}{m_0^{5/4}} \quad (6.212)$$

其物理意义代表浮力和惯性力的对比, 已见前节。

为了建立动量射流、浮射流和浮羽流统一的关系, 李斯特对圆形断面射流, 引入两个更综合的无量纲变量

$$\bar{\mu} = \frac{QB_0^{1/2}}{R_p m_0^{5/4}} = \frac{Q}{Q_0} \frac{R_0}{R_p} \quad (6.213)$$

及

$$= \frac{C_p}{R_p} \frac{z}{l_m} = C_p \frac{z}{l_Q} \frac{R_0}{R_p} \quad (6.214)$$

式中  $C_p = \frac{Q}{m^{1/2} z}$ ,  $R_p = \frac{QB_0^{1/2}}{m^{5/4}}$  为浮羽流的两个不变量, 见前节式(6.151)、(6.152)。

对动量射流, 比较式(6.204)和式(6.214)可得下列相对流量的简单关系式:

$$\bar{\mu} = \frac{R_0}{R_p} \frac{Q}{Q_0} \quad (6.215)$$

适用于浮射流的前段  $n < 1$  的情况。

同理, 对浮羽流, 将式(6.143)代入式(6.213)考虑到  $R_p = R_0$  得

$$\bar{\mu} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{k_Q}{Q_0} B_0^{1/3} z^{5/3}$$

再由式(6.214)有  $= C_p \frac{z}{l_Q}$ , 则  $z^{5/3} = \frac{l_Q^{5/3}}{C_p^{5/3}}$ , 代入上式并考虑到

$l_Q = \frac{Q_0}{m_0^{1/2}}$ ,  $R_p = \frac{QB_0^{1/2}}{m^{5/4}}$ , 最后得

$$\bar{\mu} = \frac{k_Q R_p^{2/3}}{C_p^{5/3}} z^{5/3} \quad (6.216)$$

适用于浮射流的后段  $m > 1$  的情况。由实验资料得  $k_Q = 0.15$ 。

这样在  $\bar{\mu}$  的对数坐标纸上可绘出两段不同斜率的直线, 包

括中间连接的过渡段以统一代表整个圆形断面垂向浮射流的流量沿程变化关系如图 6.34 所示。图中虚线为不同  $R_0/R_p$  值时, 浮射流起始段紊动发展区的情况。实验点子是根据 Ricou 和 Spalding (1961) 的实验资料。流量的相对增大比率也就是射流含有示踪物质的稀释度, 因此由图 6.34 可求出稀释度的渐近解。

对平面浮射流, 按同样方法引入两个归一化无量纲变量

图 6.34 垂向圆形断面浮射流稀释度的渐近解<sup>[10]</sup>

$$\bar{\mu} = \frac{QB_0^{1/3}}{R_p^{1/2}m_0} = \frac{Q}{Q_0} \frac{R_0}{R_p}^{1/2} \quad (6.217)$$

$$= \frac{C_p}{R_p} \frac{z}{l_m} = \frac{C_p z B_0^{2/3}}{R_p m_0} = C_p \frac{z}{l_Q} \frac{R_0}{R_p} \quad (6.218)$$

$R_p$  是平面浮羽流的理查森数, 定义为平面浮射流的当地理查森数的渐近值。

$$R_i = \frac{Q^2 B^{2/3}}{m^2} \quad (6.219)$$

则 
$$R_0 = \frac{Q_0^2 B_0^{2/3}}{m_0^2} \quad (6.219a)$$

按 Kotsovinos(1975) 的实验求得  $R_p = 0.735$ ,  $C_p = 0.29$ 。同时对垂向平面浮射流, 很好地验证了下列关系:

动量射流段 
$$\bar{\mu} = \frac{1}{n-1} \quad (6.220)$$

浮羽流段 
$$\bar{\mu} = \frac{1}{m-1} \quad (6.221)$$

如图 6.35 所示。由图可求出垂向平面浮射流稀释度的渐近解。

图 6.35 垂向平面浮射流的平均稀释度<sup>[10]</sup>

### 三、自由紊动浮射流的微分方程 k- 模型解

近年用紊流的 k- 模型计算射流型流动问题的的工作不少, 下面介绍侯赛因(Hossain, M. S.)和洛迪(Rodi, W.)应用 k- 模型计算垂向自由浮射流的成果<sup>[24]</sup>。

浮射流垂直向上射入密度均匀的静止流体中如图 6. 36 所示。铅垂方向的 z 轴为射流轴线方向, y 轴对平面射流为厚度方向, 对轴对称射流则为径向。设流动可用边界层微分方程表示, 密度的变化是由于温度差, 因而能量方程写为温度传输方程的形式。这样对平面射流和轴对称射流都可用统一的方程组描述其运动如下, 式中符号 j= 0 时为平面射流; j= 1 时为轴对称射流。

图 6. 36

时均流动的方程组为:

$$\text{连续方程} \quad \frac{\overline{w}}{z} + \frac{1}{y^j} \frac{\overline{v}}{y} y^j \overline{v} = 0 \quad (6. 222)$$

垂向(z 向)动量方程

$$w \frac{\overline{w}}{z} + v \frac{\overline{w}}{y} = - \frac{1}{y^j} \frac{1}{y} y^j \overline{w v} - ( - a ) g \quad (6. 223)$$

温度方程

$$\overline{w} \frac{\overline{T}}{z} + \overline{v} \frac{\overline{T}}{y} = - \frac{1}{y^j} \overline{y}^j \overline{v T} \quad (6.224)$$

各紊动变量的方程组为

k 传输方程

$$\begin{aligned} \overline{w} \frac{\overline{k}}{z} + \overline{v} \frac{\overline{k}}{y} = \frac{C_s}{y^j} \overline{y}^j \frac{\overline{v^2}}{k} \frac{\overline{k}}{y} \\ - \overline{w v} \frac{\overline{w}}{y} + \overline{g w T} \end{aligned} \quad (6.225)$$

式中  $C_s$  为常数,  $\overline{v^2}$  为体积膨胀系数 =  $\frac{1}{T} \overline{p}$

传输方程

$$\begin{aligned} \overline{w} \frac{\overline{k}}{z} + \overline{v} \frac{\overline{k}}{y} = \frac{C}{y^j} \overline{y}^j \frac{\overline{v^2}}{k} \frac{\overline{k}}{y} \\ + C_1 \overline{\frac{P + G}{k}} (1 + C_3 R_f) - C_2 \overline{\frac{w^2}{k}} \end{aligned} \quad (6.226)$$

式中  $P = - \overline{w v} \frac{\overline{w}}{y}$  为雷诺应力的紊动产生项;

$G = - \overline{g w T}$  为浮力的紊动产生项;

$R_f = - \frac{1}{2} \frac{\overline{G v^2}}{P + G}$  为一个理察森式的参数,  $\overline{G v^2}$  是侧向脉动

分量产生的浮力紊动产生项, 在垂向浮射流侧向无浮力, 故  $\overline{G v^2} =$

0,  $R_f = 0$ 。  $C, C_1, C_2, C_3$  都是常数。

其他各紊动相关量的模化关系式如下。

$$\begin{aligned} \overline{w v}: \quad - \overline{v^2} \frac{\overline{w}}{y} + \overline{g v T} - C_1 \overline{\frac{w v}{k}} \\ + C_2 \overline{v^2} \frac{\overline{w}}{y} - C_3 \overline{g v T} = 0 \end{aligned} \quad (6.227)$$

$$\begin{aligned} \overline{v^2}: \quad - \frac{2}{3} - C_1 \overline{\frac{v^2}{k}} - \frac{2}{3} \overline{k} - C_2 \overline{w v} \frac{\overline{w}}{y} \\ + \frac{2}{3} C_3 \overline{g w T} = 0 \end{aligned} \quad (6.228)$$

$$\overline{v T} : \quad - \overline{v^2} \frac{T}{y} - C_{1T} \overline{\frac{v T}{k}} = 0 \quad (6.229)$$

$$\begin{aligned} \overline{w T} : \quad & - \overline{w v} \frac{T}{y} - \overline{v T} \frac{w}{y} + g \overline{T^2} - C_{1T} \overline{\frac{w T}{k}} \\ & + C_2 \overline{v T} \frac{w}{y} - C_{3T} g \overline{T^2} = 0 \end{aligned} \quad (6.230)$$

$$\overline{T^2} : \quad - 2 \overline{v T} \frac{T}{y} - \frac{1}{R} \overline{\frac{T^2}{k}} = 0 \quad (6.231)$$

式中  $R$  为温度脉动的时间比尺与速度脉动的时间比尺之比值, 可设为常数。

本模型在  $k$  方程和  $\overline{v T}$  方程中的扩散项与标准的  $k$ - 方程稍有不同, 后者  $k$  和  $\overline{v T}$  的扩散系数假设等于涡粘性系数  $\epsilon$ , 分别除以经验常数  $k_0$  和  $C_1$  [见式(6.94)、(6.95)], 而在本模型分别为  $C_s \frac{\overline{v^2} k^2}{k}$  和  $C \frac{\overline{v^2} k^2}{k}$ , 因为  $k$  和  $\overline{v T}$  的侧向扩散与侧向脉动分量  $\overline{v^2}$  的关系比反映剪切应力的  $\epsilon$  更密切些。

上述各紊动相关项的关系式可对单独的应力、热通量和温度方差求解, 现写出其代数表达式如下。

$\overline{w v}$ : 可写为涡粘性的形式

$$- \overline{w v} = \epsilon \frac{w}{y} \quad \epsilon = \frac{\overline{v^2} k^2}{k} = c_\mu \frac{k^2}{k} \quad (6.232)$$

式中系数  $c_\mu$  取决于浮力的影响:

$$= \frac{1 - C_2}{C_1} \left( 1 + \frac{1}{C_{1T}} \frac{k}{g} \frac{T/y}{w/y} \right) \quad (6.233)$$

$\overline{v^2}$ : 可求得为

$$\frac{\overline{v^2}}{k} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1 - C_2}{C_1} \right) = \text{const} \quad (6.234)$$

因重力在  $v$  方向的分量为零, 在垂向浮射流中浮力对  $\overline{v^2}/k$  无影响。

$\overline{v T}$  : 可写为涡扩散的形式

$$-\overline{v T} = \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{T}{y} \quad \epsilon = C_{1T} \quad (6.235)$$

$\overline{w T}$  : 出现在  $k$  方程中, 可表达为

$$-\overline{w T} = \frac{1}{C_{1T}} \frac{k}{\sigma} \left[ \overline{w v} \frac{T}{y} + (1 - C_{2T}) \overline{v T} \frac{w}{y} - (1 - C_{3T}) g \overline{T}^2 \right] \quad (6.236)$$

$$\overline{T}^2 : \text{可表达为} \quad -\overline{T}^2 = 2R \frac{k}{\sigma} \overline{v T} \frac{T}{y} \quad (6.237)$$

式(6.233)中  $T/y$  及  $w/y$  都是负值, 可见  $\overline{v T}$  值在有浮力的射流中比在无浮力的射流中为大, 故在  $k$ -模型中  $C_{1T}$  和  $\epsilon$  都因浮力的影响而增大。

以上各式包含 11 个经验常数, 可用表 6.3 的值(按 Gibson 和 Launder1976 的建议)。(在本例无  $C_3$ )。

表 6.3  $k$ -模型的经验常数

经验常数	$C_s$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_{1T}$	$C_{2T}$
值	0.24	2.2	0.55	0.55	3.0	0.5
经验常数	$C_{3T}$	$R$	$C$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
值	0.5	0.8	0.15	1.44	1.92	0.8

此外洛迪对轴对称射流又作了下列修改:

$$\epsilon = (1 - 0.44G) \frac{\overline{v}^2 k^2}{k} \quad (6.238)$$

$$G_2 = 1.92(1 - 0.35G) \quad (6.239)$$

式中 
$$G = \left| \frac{y_e}{w_m} \frac{dw_m}{dz} \right|^{0.2} \quad (6.240)$$

$w_m$  为射流轴线上的最大流速,  $y_e$  为射流边缘至对称轴的距离。

侯赛因采用有限差的方法对上述模型进行数值计算。计算从射流出口起始条件开始, 沿  $z$  轴方向向上推算, 计算域按对称轴线

取半边射流。边界条件: 在射流边缘流动变量取周围环境的值, 现为静止环境,  $\overline{w} = 0$ ; 温度等于当地环境温度; 环境流体可看作是无紊动的, 则  $k$  和  $\epsilon$  值均为零。在射流轴线处因对称关系,  $\overline{w}$ 、 $\overline{T}$ 、 $k$  及  $\epsilon$  对于  $y$  的梯度均为零。

计算结果认为, 对于一般浮射流其流动可分为 3 个区: 在喷口附近一段距离其流动基本上属于动量射流型; 在距喷口远处流动属于浮羽流型; 中间有一过渡区如图 6.36 所示。在纯射流区和浮羽流区, 流动均存在相似性, 在过渡区则没有相似性。对纯射流区和浮羽流区, 计算得出的流速分布和温度差  $\overline{T}$  分布都和实验资料相符, 其图线不再引述。其扩展率如用下式标准:

$$\begin{aligned} \text{按流速分布计算的扩展率 } S_w &= \frac{dy^{0.5} \overline{w}_m}{dz} \\ \text{按温度分布计算的扩展率 } S_T &= \frac{dy^{0.5} \overline{T}_m}{dz} \end{aligned} \quad (6.241)$$

计算结果和实验比较, 符合得相当好(见表 6.4)。

表 6.4 纯射流和浮羽流的扩展率

数据源	流动类型		平面				轴对称			
	扩展率		纯射流		浮羽流		纯射流		浮羽流	
			$S_w$	$S_T$	$S_w$	$S_T$	$S_w$	$S_T$	$S_w$	$S_T$
k- 及代数表达式 模型计算值	0.116	0.154	0.127	0.125	0.086	0.115	0.109	0.100		
实验值 (按 Chen & Rodi1980)	0.11	0.142	0.12	0.13	0.086	0.113	0.112	0.104		

整个浮射流的轴线流速和轴线温度差值沿程的变化规律可用组合的无量纲参数归一化表示。对平面浮射流和轴对称浮射流分别如图 6.37、图 6.38 所示。从图可以看到, 流动分为纯射流区、过渡区和浮羽流区的规律是很明显的, 模型计算的成果与前人实验



图 6.37 平面浮射流的流速和温度沿轴线的衰减<sup>[24]</sup>

图 6.38 轴对称浮射流的流速和温度沿轴线的衰减<sup>[24]</sup>

资料符合得相当满意。对纯射流区和浮羽流区分别得出  $\bar{w}_m/w_0$  和  $\bar{T}_m/T_0$  沿轴线衰减的归一化关系式及过渡区的曲线都是有实用价值的成果。通过计算还得到紊动能  $k$  的断面分布曲线, 以及  $k$  方程各项在断面上的分配平衡关系曲线, 这里就不引述了。

## 6.5 横流中的紊动射流

实际工作中不少射流是泄入流动的流体内, 而且周围流体流动的方向常和射流出射的方向成一定的角度。如烟囱喷出的烟气流入有风的大气中, 废水排入河流中等都是常见的例子。现分几种情况讨论如下。

### 一、垂直向上射入横流中的等密度圆形断面紊动射流

环境中的横流遇到射流的阻碍形成绕流, 射流的周界中压强分布前后不对称, 射流受到横流的推力而发生弯曲如图 6.39 所

图 6.39 横流中的圆形断面射流

示。整个射流分为三段：在出口后附近存在一个势流核心区，从出口至势流核心区末端为射流的起始段，在段流动方向基本上沿出射方向，射流弯曲不大。以后射流主体段逐渐转变方向，由正交于横流逐渐变为与横流平行，这段称为弯曲段。在段绕流作用大，射流两侧形成一对反向的旋涡，使得射流断面由圆形变为扁卵石形并逐渐发展成为肾形，其演变过程如图 6.40 所示。旋涡发展增大，至弯曲段末端已充满全断面。在弯曲段有很高的横向压强梯度，掺混作用强烈，流速衰减也较快。在弯曲段后面，流动方向基本上和横流方向一致，称为顺流贯穿段。在贯穿段横流的绕流作用消失，压强可看作静压分布。

图 6.40 横流中垂向圆形射流断面形状的演变<sup>[20]</sup>

设横流的流速为  $u_a$ ，射流出射流速为  $u_0$ ，两者的比值为流速比  $R$

$$R = \frac{u_0}{u_a} \quad (6.242)$$

核心区沿轴线的长度  $s_0$  和  $R$  有关，由于绕流作用  $s_0$  一般小于静止环境中射流的起始段长度  $L_0$ ，随  $R$  的增大  $s_0$  渐近于  $L_0$ 。

实际工作首先关心的是射流轴线的轨迹。定义射流各断面上最大流速点的连线作为射流的轴线。由于射流外的绕流前后不对称，卷吸进入射流的周围流体的性质有差异，掺混的发展也有差

异,所以射流轴线和射流的中心线不一致。一般射流轴线的位置略靠外侧,如图 6.39 所示。

从量纲分析可将射流轨迹表达为

$$\frac{Z}{D} = f \left( \frac{X}{D}, R \right) \quad (6.243)$$

Pratte 和 Baines(1967)依据实验资料提出:

射流外边界的方程为

$$\frac{Z_0}{RD} = 2.63 \left( \frac{X}{RD} \right)^{0.28} \quad (6.244)$$

射流内边界的方程为

$$\frac{Z_i}{RD} = 1.35 \left( \frac{X}{RD} \right)^{0.28} \quad (6.245)$$

射流中心线的方程为

$$\frac{Z_c}{RD} = 2.05 \left( \frac{X}{RD} \right)^{0.28} \quad (6.246)$$

其他研究者提出同种类型的经验表达式不少,不再列举。

从理论上推求射流轨迹的工作,较早提出的有 A (1963)的方法<sup>[20]</sup>。主要论点为:横流作用于射流的压差阻力是引起射流弯曲的原因,这个绕流阻力对  $d$  段射流可写为  $C_D \frac{u_a^2 \sin^2}{2} yd$ , 它应和该段射流的离心惯性力  $\frac{Ad}{r} \cdot v^2$  相平衡,即

$$C_D \frac{u_a^2 \sin^2}{2} yd = \frac{Ad}{r} \cdot v^2 \quad (6.247)$$

式中  $A$  为正交于  $x$  轴的射流断面面积,  $v$  为断面平均流速,  $\theta$  为射流轴线与  $x$  轴的夹角,  $C_D$  为绕流阻力系数,  $y$  为射流在  $y$  方向的厚度(图 6.39),  $r$  为射流轴线的曲率半径。由几何关系有

$$r = \frac{1}{\frac{d^2 \theta}{dz^2}} \quad (6.248)$$

$$\text{及} \quad \sin = \frac{1}{1 + \text{ctg}^2} \quad \text{ctg} = \frac{dx}{dz} \quad (6.249)$$

此法又假定射流的动量在正交于横流方向的分量守恒, 以及由实验资料对  $y$  作出假设, 求解  $dz/dx$ , 最后积分得出射流轴线轨迹的关系式。分析中假设  $C_D$  是常数, 按所得成果和前人实验资料比较,  $C_D$  值约为 3, 此值较大, 不太合理, 后来多认为  $C_D$  应是变数。这里就不介绍其最后得出的轨迹公式。

近年Subramanya和Porey(1984)<sup>[26]</sup>同样按式(6.247)的论点, 但认为绕流阻力系数  $C_D$  沿射流应是变化的, 一般  $C_D = f(z/D)$ 。同时假定沿射流轴线任意断面的动量通量  $M$  和射流初始动量通量  $M_0$  成比例, 即

$$M = \alpha M_0 \quad (6.250)$$

$\alpha$  为比例常数。上式也可写为

$$Av^2 = \alpha \frac{D^2}{4} u_0^2 \quad (6.251)$$

由(6.247)、(6.248)、(6.249)、(6.251)诸式可得

$$\frac{1}{1 + \frac{dx}{dz}^2} \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{yC_D}{\frac{1}{2}D^2R^2_0} \quad (6.252)$$

或写为

$$\frac{d}{dz} \sinh^{-1} \frac{dx}{dz} = \frac{C_D}{\frac{1}{2}R^2_0} \frac{y}{D^2} \quad (6.253)$$

积分上式得

$$\sinh^{-1} \frac{dx}{dz} = \frac{1}{\frac{1}{2}R^2_0} \frac{y}{D^2} C_D dz \quad (6.254)$$

化简再积分得

$$\frac{x}{D} = \sinh \frac{1}{2R^2} \frac{y}{D} C_D \frac{z}{D} \quad (6.255)$$

式(6.255)就是射流轴线轨迹的一般方程。求解这方程必须知道  $\frac{y}{D}$  及  $C_D$  随  $\frac{z}{D}$  变化的关系。他们通过自己的实验同时也利用前人的实验资料求得射流厚度的变化和各段的轨迹如下:

实验资料表明射流厚度的变化与流速比  $R$  无关,只是  $z/D$  的函数,其关系式为

$$\frac{y}{D} = 2.07 \frac{z}{D}^{0.27} \quad (6.256)$$

在出口近区射流起始段,假定射流断面保持为圆形,  $C_D$  等于出射断面的阻力系数  $C_{D0}$ , 系数  $\alpha = 1$ 。采用式(6.256)的  $\frac{y}{D}$ , 则式(6.255)成为

$$\frac{x}{D} = 0.457 \frac{C_{D0}}{R^2} \frac{z}{D}^{2.27} \quad (6.257)$$

改写后得近区的射流轴线方程:

$$\frac{z}{D} = 1.4 \frac{x}{D} \frac{R^2}{C_{D0}}^{0.44} \quad (6.258)$$

根据 Fearn 等的实验资料,阻力系数  $C_{D0}$  随流速比  $R$  的变化关系如图 6.41 所示,当  $R = 2.0$ ,  $C_{D0}$  高达 2.80; 当  $R$  增大时  $C_{D0}$  很快降低,当  $R = 8.0$ ,  $C_{D0}$  已减小至 0.40。

在射流弯曲段,  $C_D$  和  $C_{D0}$  差别很大, 设  $C_D$  随  $R$  的变化与  $C_{D0}$  相同, 可设

$$C_D = C_{D0} f \frac{z}{D}$$

为简便起见用指数关系

$$C_D = k_1 C_{D0} \frac{z}{D}^{m_1} \quad (6.259)$$

图 6.41 阻力系数  $C_{D0}$  与流速比  $R$  的关系<sup>[26]</sup>

将式(6.259)及式(6.256)代入式(6.255), 积分可得

$$\frac{x}{D} = k_2 \frac{C_{D0}}{R^2} \frac{z}{D}^{m_2} \quad (6.260)$$

可改写为

$$\frac{z}{D} = k_3 \frac{R^2}{C_{D0}} \frac{x}{D}^{m_3} \quad (6.261)$$

由实验资料定出常数  $k_3$  和  $m_3$ , 求得射流弯曲段的轨迹方程

$$\frac{z}{D} = 1.45 \frac{x}{D} \frac{R^2}{C_{D0}}^{0.31} \quad (6.262)$$

上式和实验资料的验证如图 6.42 所示。由实验还可定出弯曲段终端坐标  $z_s$  的位置

$$\frac{z_s}{D} = 1.65R \quad (6.263)$$

对射流轴线流速  $u_m$  的变化研究的工作不多, 现介绍 Patrick (1967) 对不同流速比实验得到的轴线流速  $u_m$  沿程衰减的图线如图 6.43 所示。



图 6.42 射流弯曲段的轨迹<sup>[26]</sup>

图 6.43 不同流速比下射流轴线流速的衰减<sup>[21]</sup>

另一类型的方法是除射流的动量关系、绕流作用等以外,还考虑卷吸进入射流的流量的作用。而对卷吸函数的形式各家采用的又各不相同,例如 Chan T. L., Lin J. T., 和 Kennedy J. F. 等 (1976)<sup>[27]</sup> 表示卷吸流速为

$$v_e = w_m + (u_a - u_m) \quad (6.264)$$

$u_m, w_m$  分别为射流轴线流速在  $x, z$  两方向的分量;  $\alpha, \beta$  为两个卷吸系数。他们也把射流分为 3 个区:近区、弯曲区和远区。认为

$$\text{在近区} \quad u = 0 \quad v_e = w_m + \alpha u_a \quad (6.265a)$$

$$\text{在远区} \quad u = u_a \quad v_e = w_m \quad (6.265b)$$

用静止流体中射流的卷吸系数即 0.057, 由实验资料推得 0.68。但分析中对弯曲区忽略绕流阻力作用, 成果表达较复杂, 不再详述。

横流中的平面自由射流的研究工作相对较少些, 可参考文献 [21] 的介绍。

## 二、垂直向上射入横流中的浮射流

在排热和排污工程中, 当环境流体是流动的而且它的密度又大于排出流体的密度时, 就出现这种射流情况。这种在横流中的浮射流比上段中的情况多了浮力的作用, 从现象来说虽然仍可分为起始段、弯曲段和顺流贯穿段 3 个区, 但具体分析就更复杂些。

原则上说也可仿照 6.4 节中对浮射流分析采用的积分方程的方式求数值解。但首先必须作断面上流速分布、密度差分布等存在自相似的假定, 设定分布的模式如高斯分布, 这从实测资料看来是相当不符合的。其次, 卷吸假定中的卷吸系数  $\alpha$  对这种射流显然不是常数, 而是一个沿流变化的复杂函数。再则在动量方程中还要考虑横流的绕流作用, 绕流阻力系数  $C_D$  也是难于确定的。所以在前人的研究中虽然也有一些采用积分方程的途径的<sup>[23]</sup>, 在一定程度上也可参考应用, 但还没有较通用或简便的方法。

另一个较实用的方法是量纲分析, 结合实验建立一些估算射流主要参数的关系式。要建立能普遍适用于射流 3 个区段的关系式是困难的。目前一种方法是从极限角度, 分为出射后近似于铅垂方向的近区和弯曲后近似于水平方向的远区考虑。而对于每区又分为可能出现动量主导的射流形式和浮力主导的浮羽流形式来研究。下面针对圆形断面浮射流讨论。

对于动量主导的射流型流动, 采用一个特征尺度  $z_m$  来综合反映起始动量  $m_0$  和横流速度  $u_a$ , 按量纲关系

$$z_m = \frac{m_0^{1/2}}{u_a} \quad (6.266)$$

则射流各种特性参数都将是  $z/z_m$  的函数。

对于浮力主导的浮羽流型流动, 采用另一个特征尺度  $z_B$  来综合反映起始浮力通量  $B_0$  和横流速度  $u_a$ , 按量纲关系

$$z_B = \frac{B_0}{u_a^3} \quad (6.267)$$

则浮羽流各种特性参数都将是  $z/z_B$  的函数。

$z_m$  和  $z_B$  的物理意义, 可理解为射流轴线的垂向流速已衰减到与横流流速同一量级时射流所达到的高度。

实用上人们最关心的是射流轴线的轨迹、沿轴线的流速变化和含有物浓度或稀释度的变化。在近区可取水平断面分析, 在远区可取垂向断面分析, 分别用动量方程和含有物的质量守恒方程, 可求得下列各种情况的无量纲关系式<sup>[24]</sup>。

对于动量主导情况:

轴线流速  $w_m$ :

$$\frac{w_m}{u_a} = \frac{z_m}{z} \quad (z \leq z_m \text{ 近区}) \quad (6.268a)$$

$$\frac{w_m}{u_a} = \frac{z_m^2}{z} \quad (z \geq z_m \text{ 远区}) \quad (6.268b)$$

轴线轨迹  $z-x$ :

$$\frac{z}{z_m} = C_1 \frac{x}{z_m}^{1/2} \quad (z_n > z_m \text{ 近区}) \quad (6.269a)$$

$$\frac{z}{z_m} = C_2 \frac{x}{z_m}^{1/3} \quad (z_m > z_n \text{ 远区}) \quad (6.269b)$$

稀释度 S:

$$\frac{SQ_0}{u_a z_m^2} = D_1 \frac{z}{z_m} \quad (z_n > z_m \text{ 近区}) \quad (6.270a)$$

$$\frac{SQ_0}{u_a z_m^2} = D_2 \frac{z}{z_m}^2 \quad (z_m > z_n \text{ 远区}) \quad (6.270b)$$

对于浮力主导情况:

轴线流速  $w_m$ :

$$\frac{w_m}{u_a} = \frac{z_B}{z}^{1/3} \quad (z_n > z_B \text{ 近区}) \quad (6.271a)$$

$$\frac{w_m}{u_a} = \frac{z_B}{z}^{1/2} \quad (z_m > z_B \text{ 远区}) \quad (6.271b)$$

轴线轨迹  $z-x$ :

$$\frac{z}{z_B} = C_3 \frac{x}{z_B}^{3/4} \quad (z_n > z_B \text{ 近区}) \quad (6.272a)$$

$$\frac{z}{z_B} = C_4 \frac{x}{z_B}^{2/3} \quad (z_m > z_B \text{ 远区}) \quad (6.272b)$$

稀释度 S:

$$\frac{SQ_0}{u_a z_B^2} = D_3 \frac{z}{z_B}^{5/3} \quad (z_n > z_B \text{ 近区}) \quad (6.273a)$$

$$\frac{SQ_0}{u_a z_B^2} = D_4 \frac{z}{z_B}^2 \quad (z_m > z_B \text{ 远区}) \quad (6.273b)$$

各式的系数值, 从各研究者的实验所得资料略有差异, 现据 Wright(1984) 提出的列出如下<sup>[28]</sup>:

表 6.5 横流中垂向浮射流各参数公式中的系数值

系数	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>
值	2.3	1.9	2.5	1.7	0.2	0.25	0.12	0.25

上面四种近似解包括了浮射流在横流中运动的可能极限情

况。然而对实际流动只要考虑两种情况，相应于  $z_m > z_B$  或  $z_m < z_B$ 。

如果  $z_m > z_B$ ，射流的动量作用比浮力作用强，则射流将在远区才转变为浮羽流型，即射流的轨迹指数律中的指数将按  $1/2 \sim 1/3 \sim 2/3$  的序列变化。各段的分界点近似在  $z_m$  及  $z_c = \frac{m_0^2}{u_a B_0}^{1/3}$ 。

如果  $z_m < z_B$ ，射流的浮力作用比动量作用强，则射流在近区即已转变为浮羽流型，即射流轨迹的指数律中的指数将按  $1/2 \sim 3/4 \sim 2/3$  的序列变化。各段的分界点近似在  $z = l_m = m_0^{3/4} / B_0^{1/2}$  及  $z_B$ 。

上述量纲分析的结果可以用来对垂向射入横流中的浮射流的轨迹和稀释度作出近似的估算。实际上这种射流的运动是相当复杂的，由于绕流产生的旋涡对，当发展至水面时，实验观测到射流会被分成两股，出现所谓分叉现象，要对它进行细致的分析就有很大的困难了。

### 三、从侧边水平射入横流中的浮射流

实验表明射流出口后的流动也可分为起始段、弯曲段和顺流贯穿段 3 个区段。起始段为基本上与横流正交的水平段，其中有一个以出口断面为底的微曲圆锥形核心区，其长度  $s_0$  随流速比  $R = \frac{V_0}{u_a}$  的增大而增长， $s_0 / D = 1 \sim 2$ ，比静止流体中圆射流的核心区长度要短很多。核心区后面因横流的推力很快进入弯曲段，逐渐由正交于横流转变为平行于横流的贯穿段。

在起始段因横流的绕流使上下侧掺混作用较大，在距出口  $1.0D$  处射流的断面形状已由圆形转变为竖向椭圆形，以后逐渐变为肾形如图 6.44 所示。在弯曲段横流影响掺混的作用更为显著，很快达到竖向混合均匀。进入贯穿段后在横向也逐渐达到混合均匀。从实验资料看，各断面上速度分布和温度分布均不对称，也看

图 6.44 从侧边射入横流中的浮射流断面形状的演变

不出存在相似性<sup>[29]</sup>。

前面讨论的垂直向上射入横流中的浮射流,其轴线轨迹是在一个竖向立面上的二维曲线。从水平射入横流中的浮射流,因同时受横流推力与向上浮力的作用,一般说来其轴线轨迹应是一条扭曲的三维曲线。但从实用观点也可分解为在  $x-y$  平面上和  $x-z$  立面上的投影来表示。根据我们热水射流实验的资料,实验范围:热水射流和冷水横流温度差  $T_0 = T_0 - T_a = 8.3 \sim 12.1$  ;流速比  $R$

$= 3.8 \sim 12.3$ ;射流密度弗劳德数  $F_{d0} = v_0 \sqrt{\frac{a - 0}{a} g D} = 17.6 \sim 61.5$ ;出口流速  $v_0 = 0.45 \sim 1.28 \text{m/s}$ ,射流在  $x-z$  立面上的投影基本上是一条水平线,说明在本实验范围,和动量作用相比浮力作用是次要的。射流在  $x-y$  平面上的投影是一条抛物线,资料统计得到的经验关系式为

$$\frac{y}{D} = \frac{29.44R^2}{F_{d0} \frac{H}{D}^{1.3}} \frac{x}{D}^{1/2} \quad (6.274)$$

式中  $H$  为射流出口断面中心上的淹没水深,  $D$  为出射断面的射流直径。

实验还得出射流半厚度  $b$  沿程扩展的经验关系式:

$$\frac{b}{D} = 2.1 \frac{R}{F_{d0}}^{2/3} \frac{s}{D}^{5/6} \quad (6.275)$$

射流轴线流速衰减的经验关系式:

$$\frac{u_m}{u_0} = 0.0134 \frac{F_{d0}^{1.70} (H/D)^{1.44}}{R^{2.25} (x/D)^{0.38}} \quad (6.276)$$

射流轴线温度差衰减的经验关系式:

$$\frac{T_m}{T_0} = 0.5 \frac{R^{0.02} F_{d0}^{0.05}}{(H/D)(x/D)^{0.5}} \quad (6.277)$$

#### 四、关于烟囱喷流扩散的补充

从烟囱喷出的烟流,在水平风力作用下其性质属于横流中的浮射流,原则上应可按本节一、二的方法分析。但由于大气的环境条件常较水环境复杂,烟流的扩散受大气紊动的结构及大气稳定度的影响很大,这里作些必要的补充。

烟团的扩散和紊动旋涡的尺度有很大关系,在第四章已有一定讨论。这里再引斯里特(Slade, D, H. 1968)描述的图形补充说明。如图 6.45 所示,图中实线圆表示烟团,各旋转箭头表示紊动旋涡的尺度,虚线表示烟团重心运动的路线,图中(a)为紊动旋涡尺度小于烟团,烟团轮廓因紊动扩散作用而扩大,但其平均运动轨迹不受影响。(b)为紊动旋涡尺度远大于烟团,烟团运动轨迹将受影响而发生波动,但烟团本身却象流场中的微团,主要只是分子扩散作用。(c)中紊动旋涡尺度与烟团大小同级,此时烟团也会受到紊动扩散作用而且发生变形。根据这些分析可以推知,从烟囱喷出的

烟流随着大气中紊动旋涡尺度的不同而会出现不同的扩散方式。

图 6.45 烟团扩散与紊动旋涡尺度的关系

大气的紊动与大气的稳定度密切相关,而大气稳定的程度和温度垂向变化有关,如果大气的温度变化是向上递减的,密度向上递增,是不稳定的;反之如气温向上递增,则是稳定的(较严格的分析见第七章第二节)。对大气稳定度的判别准则,一般是将大气块上升单位距离时的温度降低值  $\Delta T$  与干绝热情况的降低值  $\Delta T_d$  比较,如  $\Delta T > \Delta T_d$  是不稳定态;如  $\Delta T < \Delta T_d$  是稳定态;如  $\Delta T = \Delta T_d$  则是中性稳定态。 $\Delta T_d = 1 / 100\text{m}$ 。在不稳定的大气层中,紊动的程度就较为强烈,烟流容易扩散;反之,气层的稳定程度愈高,紊动愈弱,就愈不容易扩散。

因此,烟流扩散的型式(简称烟型)随大气稳定度而异,斯里特



提出可区分为如图 6.46 所示的五种型式,图左方并示出垂向温度变化的情况。现分别简要说明如下。

图 6.46 烟气扩散的几种型式<sup>[45]</sup>

图中:(a)为扇型,大气中出现逆温,很稳定,烟气扩散不好,中心部分浓度高,但对地面污染不大,(b)为薰烟型,大气上部稳定,下部中性(或不稳定),此时上部逆温层抑制向上扩散,而只能局限于向下扩散,是一种最不利的烟型。(c)为环链型,大气不稳定,紊动强烈,扩散迅速,浓度不高,污染影响不大。(d)为圆锥型,大气中性稳定,这是一般烟气正常扩散的形式。(e)为屋脊型,大气上部中性,下部稳定,上部扩散较快,而底部逆温层又阻止污染物向下

扩散,故地面较安全,是一种有利的烟型。图中右方并给出各种烟型污染物浓度的垂向分布的示意图。

烟型如此多变,要用一个统一的数学公式来预估其浓度分布是难以做到的,一般的预估方法只能针对较正常的扩散方式进行分析计算。

## 6.6 分层流体中的紊动射流

在环境流体中常出现密度在铅垂方向不均匀,形成一定的垂向密度梯度,即所谓分层现象。水环境的密度分层多由于温度分布或含盐度分布不均匀所引起,前者如水库或深水湖泊,后者如河口、港湾和近海。有关分层流的论述见第七章。

密度分层的静止流体,其稳定的密度分布是下重上轻。当密度小于周围流体的射流进入后,受浮力作用而上升,同时卷吸周围密度较大的流体,掺混后其密度增大,在上升过程中,周围流体的密度却是逐渐减小的,所以射流内外的密度差逐渐减小,即浮力逐渐减小。如水深较大,就会上升至某一高度后停止升高,而向旁侧散开,即存在一个最大升高。出现这种情况对于排泄污水是有利的,因为污水可以不冒出水面而在水面下得到稀释,从而保持水面的整洁。所以在分层环境中浮射流的最大升高及该处稀释度的确定是实际工作需要估算的项目。

实际环境中流体密度的垂向分布多是非线性的,但有些可简化近似按线性分布分析。下面限于讨论线性分布的情况。

### 一、静止分层流体中的自由紊动浮射流

#### 1. 控制流动的方程与求解

讨论圆形断面浮射流的情况如图 6.47 所示。射流出口断面上密度为  $\rho_0$ ,在同一高程上环境流体密度为  $\rho_{a0}$ ,射流中的点密度为

(s, r), 轴线密度为  $\rho_m(s)$ , 环境流体密度为  $\rho_a(z)$ , 其垂向梯度  $\frac{d\rho_a}{dz} = \text{const}$ 。设出射流速的水平倾角为  $\theta_0$ , 则基于前面分析, 射流轴线将为 S 形, 至最大升高处即浮升终点  $(x_t, z_t)$ , 射流将向旁侧散开。

图 6.47 密度分层环境中的圆形断面浮射流

假定射流断面上流速分布具有相似性且为正态分布:

$$u(s, r) = u_m(s) e^{-\frac{r^2}{b^2}} \quad (6.278)$$

断面上密度差(射流密度与相同高程的环境密度之差)也有相似性且为正态分布:

$$\frac{\rho(r, s) - \rho_a(r, s)}{\rho_m(s) - \rho_a(s)} = e^{-\frac{r^2}{2b^2}} \quad (6.279)$$

同时假定射流的卷吸过程不受环境分层的影响, 则控制流动的连续方程及水平方向的动量方程和密度均匀环境中的浮射流相同, 铅垂方向的动量方程因环境密度在  $z$  方向线性变化而要做相应的改变:

$$\frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b^2}{2} \sin \theta = g^2 b^2 \frac{\rho_m - \rho_a}{\rho_a} \quad (6.280)$$

射流出射断面的密度和环境流体密度之间的密度差可能是由于射流的某种含有物质(如含盐量、热量等)的浓度  $c$  和环境中含有物质的浓度  $c_a$  不同所引起。在小密度差的情况,密度差和浓度差可认为有线性关系

$$[\rho - \rho_0(s, r)] = [c - c_a(s, r)]$$

所以射流含有物总量沿程不变的关系可以用密度差表示的物质守恒关系表达,即沿射流含有物通量的变化等于从射流四周卷吸进入的卷吸量:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^b \rho (c - c_a) 2r dr &= 2 \int_0^b \rho_e (c - c_a) \\ &= 2 u_m b (\rho - \rho_m) \end{aligned} \quad (6.281)$$

式中右边括号内应为射流周界上的密度差,因环境密度是线性变化,故可以用轴线上的密度差作为平均值计算。将式(6.278)、式(6.279)及连续方程等代入式(6.281),经过变换整理可简化为

$$\frac{d}{ds} [u_m^2 b^2 (\rho_m - \rho)] = \frac{1 + \alpha^2}{2} u_m b^2 \frac{d\rho_a}{dz} \sin \theta \quad (6.282)$$

这样,控制这种浮射流运动的整个方程组为:

连续方程 
$$\frac{d}{ds} (u_m b^2) = 2 u_m b \quad (6.283)$$

水平方向动量方程

$$\frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b^2}{2} \cos \theta = 0 \quad (6.284)$$

铅垂方向动量方程

$$\frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b^2}{2} \sin \theta = g b^2 \frac{\rho_m - \rho_a}{\rho_a} \quad (6.280)$$

密度差守恒方程

$$\frac{d}{ds} u_m^2 b^2 (\rho_m - \rho) = \frac{1 + \alpha^2}{2} u_m b^2 \frac{d\rho_a}{dz} \sin \theta \quad (6.282)$$

射流轴线轨迹

$$\frac{dx}{ds} = \cos \quad (6.285)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \quad (6.286)$$

射流出口的边界条件为:

$$u_m(0) = u_0, b(0) = b_0, \theta(0) = \theta_0, \phi(0) = \phi_0, x(0) = 0, z(0) = 0.$$

求解上列方程组一般只能用数值法计算。

范乐年等<sup>[25]</sup>将上列方程经过无量纲化后,表明浮射流的特性可以用起始断面的密度弗劳德数  $F_{d0}$ 、环境分层参数  $T$  和出射角  $\theta_0$  三个参数来表征,  $F_{d0}$  的定义见 6.4 节。环境分层参数的定义为

$$T = \frac{\rho_a - \rho_0}{D \rho_a} \quad (6.287)$$

$D$  为射流起始断面的直径。取  $\rho_a = 0.082$ ,  $\rho_0 = 1.16$  求得浮射流的流量、动量通量、浮力通量及轴线坐标等的无量纲数值解,并绘成图线。

对于平面浮射流的情况,作圆形断面浮射流同样的假定,按相同的分析方法可列出控制流动的方程组如下:

$$\frac{d}{ds}(u_m b) = \frac{2}{D} u_m \quad (6.288)$$

$$\frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b}{2} \cos \theta = 0 \quad (6.289)$$

$$\frac{d}{ds} \frac{u_m^2 b}{2} \sin \theta = g b \frac{\rho_a - \rho_m}{\rho_a} \quad (6.290)$$

$$\frac{d}{ds} [u_m b (\rho_a - \rho_m)] = \frac{1 + \frac{2}{D^2}}{2} u_m b \frac{d\rho_a}{dz} \quad (6.291)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \quad (6.292)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \theta \quad (6.293)$$

射流出口的边界条件为

$u_m(0) = u_0, b(0) = b_0, (0) = 0, (0) = 0, x(0) = 0, z(0) = 0$ 。  
在相同文献中取  $\alpha = 0.16, \beta = 0.89$  也求得无量纲的数值解。

考虑到这些近似解是在一系列假定下且设  $\alpha$  为常数算得的, 成果的表达也较复杂, 接近浮升终点的区域更不符合实际, 就不引述了。

## 2. 量纲分析解

对于有密度分层的环境流体, 常引用布伦特-韦伊塞莱 (Brunt-Vaisala) 频率  $N$  来表征垂向密度梯度, 其定义为

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \quad (6.294)$$

它的物理意义是内波可能的最高频率。

在排污问题中最感兴趣的是浮射流浮升的终点高度(最大升高)及终点稀释度的确定。对圆形断面浮射流, 如动量主导, 浮升终点高度应和起始比动量  $m_0$  及代表密度梯度的  $N^2$  有关, 两者可组成一个特征长度  $(m_0/N^2)^{1/4}$ , 从量纲考虑, 终点高度  $h_m$  将和  $(m_0/N^2)^{1/4}$  成正比。如浮力主导, 则终点高度  $h_B$  应和起始比浮力通量  $B_0$  及  $N^2$  有关, 两者也可组成另一个特征长度  $(B_0/N^3)^{1/4}$ , 将有  $h_B \propto (B_0/N^3)^{1/4}$ 。对于平面浮射流, 也同样有两个特征长度  $(m_0/N^2)^{1/3}$  及  $(B_0/N^3)^{1/3}$ , 当动量主导时  $h_m \propto (m_0/N^2)^{1/3}$ ; 浮力主导时  $h_B \propto (B_0/N^3)^{1/3}$ 。

定义无量纲数

$$S = \frac{m_0 N^2}{B_0} \quad (6.295)$$

$S$  代表上述两个特征长度的比(在圆形断面浮射流指数乘 8 倍, 在平面浮射流指数乘 6 倍)。则参数  $S$  和射流起始的理查森数  $R_0$  两者就足以确定在线性分层环境中任何浮射流的运动。当  $S \gg 1$ , 表示动量主导; 当  $S \ll 1$ , 表示浮力主导, 对于这两种极限的情况, 可

分别求出浮射流特性变量的渐近解。

李斯特综合前人的实验资料,对线性分层环境中圆形断面浮射流及平面浮射流在上述两种极限情况的浮升终点高度及该处的稀释度分别求得估算的关系式<sup>[24]</sup>,列于表 6.6 中。表中无量纲高度的定义见 6.4 节,即对圆形断面射流  $= c_p z B_0^{1/2} / R_p m_0^{3/4}$ ;对平面射流  $= c_p z B_0^{2/3} / R_p m_0$ 。

表 6.6 线性分层环境中浮射流的浮升终点高度及其稀释度

特性变量	圆形断面射流源	
	$S m_1$	$S n_1$
浮升终点高度 $h_m$ 或 $h_B$	$h_m = 3.8(m_0/N^2)^{1/4}$	$h_B = 3.8(B_0/N^3)^{1/4}$
无量纲浮升高度 $T$	$1.7S^{-1/4}$	$1.7S^{-3/8}$
无量纲稀释度 $\bar{\mu}_T$	$1.2S^{-1/4}$	$1.5S^{-5/8}$
	平面射流源	
	$S m_1$	$S n_1$
浮升终点高度 $h_m$ 或 $h_B$	$h_m = 3.6(m_0/N^2)^{1/3}$	$h_B = 2.5(B_0/N^3)^{1/3}$
无量纲浮升高度 $T$	$1.4S^{-1/3}$	$1.0S^{-1/2}$
无量纲稀释度 $\bar{\mu}_T$	$0.82S^{-1/6}$	$1.0S^{-1/2}$

此外,李斯特对线性分层环境中圆形断面浮射流,还应用前述卷吸假定所推导出的控制方程,但采用下列沿射流变化的卷吸系数

$$= j \exp \ln \frac{p}{j} \frac{R_i}{R_p}^2 \quad (6.296)$$

式中  $j, p$  分别为动量射流和浮羽流的卷吸系数,  $R_i$  为当地理查森数  $R_i = \frac{QB^{1/2}}{m^{5/4}}$ ,  $R_p$  为浮羽流理查森数,  $R_p = 0.557$ , 计算得到不同高度处浮射流的稀释度如图 6.48 所示,其中参变数为  $S$ 。

图 6.48 线性分层环境中圆形断面浮射流的稀释度<sup>[24]</sup>

## 二、分层横流中的浮射流

浮射流在分层横流中的运动同时受到密度垂向分层和横流推力的影响, 流动就更复杂得多, 近年也有采用积分模式求解的, 但相当复杂。这里只介绍较简易实用的量纲分析的一些成果。

分析无分层的横流中的浮射流时, 曾引入特征长度  $Z_m = \frac{m_0^{1/2}}{u_a}$



及  $Z_B = \frac{B_0}{u_a^3}$  分别综合反映横流和起始动量及横流和起始浮力的作用, 现对有密度分层的情况, 再引入另一个特征长度  $l_a$  反映横流和密度分层的综合作用,

$$l_a = \frac{u_a}{N} \quad (6.297)$$

则可推论浮射流的浮升终点高度及终点稀释度等变量将是  $Z_m$ 、 $Z_B$  和  $l_a$  的函数。

Wright 对动量主导和浮力主导两种极限情况分别提出估算分层横流中浮射流浮升终点高度  $Z_T$  及终点稀释度  $S_m$  的无量纲关系式如下<sup>[28]</sup>

对于动量主导情况:

$$\text{近区, 浮升终点高度} \quad \frac{Z_T}{Z_m} = k_1 \frac{l_a}{Z_m}^{1/2} \quad (6.298)$$

$$\text{终点稀释度} \quad \frac{S_m Q_0}{u_a Z_m^2} = k_9 \frac{Z_T}{Z_m} \quad (6.299)$$

$$\text{远区, 浮升终点高度} \quad \frac{Z_T}{Z_m} = k_3 \frac{l_a}{Z_m}^{1/3} \quad (6.300)$$

$$\text{终点稀释度} \quad \frac{S_m Q_0}{u_a Z_m^2} = k_{10} \frac{Z_T}{Z_m}^2 \quad (6.301)$$

对于浮力主导情况:

$$\text{近区, 浮升终点高度} \quad \frac{Z_T}{Z_B} = k_5 \frac{l_a}{Z_B}^{3/4} \quad (6.302)$$

$$\text{终点稀释度} \quad \frac{S_m Q_0}{u_a Z_B^2} = k_{11} \frac{Z_T}{Z_B}^{5/3} \quad (6.303)$$

$$\text{远区, 浮升终点高度} \quad \frac{Z_T}{Z_B} = k_7 \frac{l_a}{Z_B}^{2/3} \quad (6.304)$$

$$\text{终点稀释度} \quad \frac{S_m Q_0}{u_a Z_B^2} = k_{12} \frac{Z_T}{Z_B}^2 \quad (6.305)$$

和前面无分层的横流情况比较, 各相应关系式的形式是一样的, 只

是以  $l_a$  代替了  $x$ 。按式(6.297)的定义,  $l_a$  的物理意义是分层中垂直振动的水平波长, 它是唯一的水平方向的特征长度, 从量纲分析角度看它是和  $x$  相应的。Wright 用盐水进行大量的实验, 求得浮升终点高度关系式的系数值如表 6.7。

表 6.7 分层横流中浮射浮升终点高度关系式的系数值

系 数	$k_1$	$k_3$	$k_5$	$k_7$
值	2.8	2.2	3.5	2.3

终点稀释度关系式的系数值没有给出, 但把实验资料和用无分层横流情况的关系式估算值进行比较, 发现两者相差不大, 因此在没有取得更好的实验资料定出终点稀释度关系式的系数值以前, 暂时也可考虑采用无分层的横流情况即表 6.5 中的  $D_1 \sim D_4$  值来估算。

例题 6.4 设在近海深度为 70m 处垂直排放一股温度为 17.8 的淡水( $\rho = 998.6\text{kg/m}^3$ ), 流量为  $1.0\text{m}^3/\text{s}$ 。海水密度在该深度为  $1024.8\text{kg/m}^3$ , 在深度为 10m 处为  $1023.4\text{kg/m}^3$ , 可按线性变化考虑。排放出口速度为  $3.0\text{m/s}$ 。试估算浮升终点高度和终点稀释度。如该处有流速为  $0.35\text{m/s}$  的横流, 估算浮升终点高度和稀释度有何变化。

[解] 已知条件:  $H = 70\text{m}$ ,  $Q_0 = 1.0\text{m}^3/\text{s}$ ,  $u_0 = 3.0\text{m/s}$

$$\rho = 998.6\text{kg/m}^3, u_a = 0.35\text{m/s}$$

海水密度梯度

$$\frac{d\rho_a}{dz} = \frac{1023.4 - 1024.8}{70 - 10} = -0.0233\text{kg/m}^4$$

计算: 布伦特-韦伊塞莱频率

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_a} \frac{d\rho_a}{dz} = \frac{9.8}{1024.8} \times 0.0233 = 2.23 \times 10^{-4} \text{ 1/s}^2$$

$$N = 1.49 \times 10^{-2} \text{ 1/s}$$

$$\begin{aligned} \text{初始比浮力通量 } B_0 &= \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} g Q_0 \\ &= \frac{1024.8 - 998.6}{998.6} \times 9.8 \times 1.0 \\ &= 0.257 \text{ m}^4/\text{s}^3 \end{aligned}$$

$$\text{初始比动量通量 } m_0 = u_0 Q_0 = 3 \times 1 = 3.0 \text{ m}^4/\text{s}^2$$

分层环境中动量主导的  $h_m$  与浮力主导的  $h_B$  的尺度比

$$S = \frac{m_0 N^2}{B_0^2} = \frac{3 \times 1.49 \times 10^{-2}}{0.257}^2 = 0.03$$

### 1. 不考虑横流的情况

Sn 1, 应用表 6.6 对圆形断面射流

$$\begin{aligned} \text{浮升终点高度 } h_B &= 3.8 \frac{B_0^{1/4}}{N^3} \\ &= 3.8 \frac{0.257^{1/4}}{(1.49 \times 10^{-2})^3} \\ &= 3.8 \times 16.7 = 63.4 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{无量纲稀释度 } \bar{\mu} &= 1.5 S^{-5/8} = 1.5 \times (0.03)^{-5/8} \\ &= 1.5 \times 8.93 = 13.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由式(6.213), 相应 } Q &= \frac{\bar{\mu} R_p m_0^{5/4}}{B_0^{1/2}} = \frac{13.4 \times 0.55 \times 3^{5/4}}{0.257^{1/2}} \\ &= 13.4 \times 42.7 = 57.3 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

$$\text{平均稀释度 } \bar{S} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{57.3}{1.0} = 57.3$$

### 2. 考虑存在横流的情况

(1) 对圆形断面射流计算  $z_m, z_B, l_m, l_a$  等特征量

$$z_m = m_0^{1/2} / u_a = \frac{3^{1/2}}{0.35} = 4.95 \text{ m}$$

$$z_B = B_0 / u_a^3 = \frac{0.257}{0.35^3} = 5.99 \text{ m}$$

$$l_m = m_0^{3/4} / B_0^{1/2} = \frac{3^{3/4}}{0.257^{1/2}} = 4.50 \text{ m}$$

$$l_a = u_a/N = \frac{0.35}{1.49 \times 10^{-2}} = 23.5\text{m}$$

(2) 因  $z_m < z_B$ , 射流在近区已转变为浮羽流型, 按浮力主导考虑。

考虑浮升终点  $z_T > z_B$ , 按远区计算。

由式(6.304), 浮升终点高度

$$\begin{aligned} z_T = k_7 \frac{l_a^{2/3}}{z_B} \quad z_B &= 2.3 \times (23.5)^{2/3} \times 5.99^{1/3} \\ &= 2.3 \times 14.9 = 34.3\text{m} \end{aligned}$$

由式(6.305) 终点稀释度

$$S_m = k_{12} \frac{z_T^2}{z_B} j \alpha \frac{u_a z_B^2}{Q_0} = 0.25 \times \frac{34.3^2 \times 0.35}{1.0} = 103$$

( $k_{12}$  用表 6.5 中的  $D_4$  值)

### 三、烟囱喷流浮升高度的经验估算

烟囱喷出的烟流属于浮射流性质, 所喷入的大气也常是分层的, 考虑正常的稳定情况, 烟流就存在一个浮升的最大高度。而且在烟流扩散的分析中, 浮升高度是一个很重要的项目, 因为在分析时往往将烟流达到浮升最高点以后的运动, 作为点源扩散处理, 点源的高度  $H$  通常称为烟囱的有效高度, 等于烟囱的高度  $h$  加浮升高度  $h$  (即前述的  $h_m$  或  $h_B$ ), 即

$$H = h + h \quad (6.306)$$

烟流浮升高度的研究工作很多, 从理论上, 研究重要的有莫尔顿(Morton, B. R.), 泰勒(Taylor, G. I.), 图尔纳(Turner, J. S.) 等 1956 年提出浮羽流在静稳大气中浮升的模式, 以后莫尔顿(1959)推广到考虑烟气出口速度的浮射流, 萨那迪(Csannady, G. T. 1965)及斯劳逊(Slowson, P. R. 1967)等研究了有风大气中的烟流浮升, 其要点即上面各节所述。原则上这些原理和方法对水和

气都是相同的。但影响烟流运动的因素很多,除烟囱出口的几何条件、热力条件、流动条件以外,还有大气环境的气象条件,和水射流比较更复杂些,已有的理论公式常因较为复杂,公式中有些参数在实际中不好确定,因此在实际工作中仍然广泛应用经验公式进行烟流浮升高度的估算。这些公式多从实际观测资料总结得来,就会有一定的局限性。经验公式很多,现举两个较简单而得到一定验证的如下。

1. 霍兰德(Holland)公式(1955)

$$h = \frac{1}{u_a} (1.5 w_0 D_0 + 4 \times 10^{-5} Q_H) \quad (6.307)$$

式中:  $D_0$  为烟囱出口直径(m),  $w_0$  为排口烟气速度(m/s),  $u_a$  为风速(m/s),  $Q_H$  为排出烟气的热通量,或排热率( $\text{Cal/s}$ )<sup>\*</sup>。此式是美国原子能委员会和田纳西工程管理局提出的,在欧美应用较广,但不少人认为按此式估算浮升高度值偏低,作为偏安全的估算则还合适,也可将算得的升高值乘2,即增加一倍。也有建议此式用于中性稳定,在不稳定条件和稳定条件时,应将计算值分别增、减10%~20%。排热率大时此式误差太大。

2. 康卡威(Concawe)公式(1966)

$$h = 0.175 \frac{Q_H^{1/2}}{u_a^{3/4}} \quad (6.308)$$

此式也是根据现场实测资料得出,用于中、小型烟囱,和实际资料符合得相当好。 $Q_H$  大时也不能用。

从这些经验公式可以看出,排热率  $Q_H$  和风速  $u_a$  是两个主要因素。排热率愈大,浮升高度愈大;风速愈大,浮升高度愈小,此外,出口动量大时,浮升高度也增加。这些从物理性质上看也是很清楚的。

由于大气扩散的影响因素很多,当环境条件复杂时更不容易

\*  $1\text{Cal}(\text{卡}) = 4.2\text{J}(\text{焦耳})$

进行定量的准确计算, 因此就有采用环境风洞来做物理模型试验的方法。我国目前也有单位进行这方面的研究工作。

## 6.7 表面射流

从泄水槽沿水面泄入下游水域中的水射流称为表面射流 (Surface jets)。表面射流的特点是它的上边界为承受大气压的自由面。这类射流中研究最多的是发电厂排出的热水射流, 属于浮射流的性质。当射流水平出射, 假定射流表面完全水平并忽略空气阻力时, 可以看作是淹没自由射流的下半部分。如为浮射流且下游水域的水深又不大时, 就需要考虑浮力效应和底面作用的影响。

生产实际中的表面浮射流, 从泄水槽流入河、湖或港湾等水域后, 即沿底部及向两侧扩展成为三维流动。近年也有用三维数值模型直接解雷诺方程的, 但如模拟的区域较大时, 计算机容量和计算费用不少。若采用简化近似如边界层方程组等, 计算结果和应用简单的射流积分模型的成果比较, 可能改进不多。因此下面介绍采用一维积分模型, 结合量纲分析和实验资料来求解的方法及其成果<sup>[30]</sup>。先针对静止的深水环境中表面浮射流的运动。

表面浮射流泄入深的静止水域后, 其流动情况如图 6.49 所示。流动的性质决定于当地密度弗劳德数

$$F_d(x) = \frac{u}{(g^* h)^{1/2}} \quad (6.309)$$

式中各项均为距离  $x$  处的断面上的特征量,  $g^* = \frac{\rho - \rho_a}{\rho_a} g$  为折减重力加速度,  $\rho$  为密度,  $\rho_a$  为周围流体密度,  $u$  为水平流速,  $h$  为射流深度。在近距离,  $x$  小时,  $F_d \ll 1$ , 惯性力起主导作用, 射流受动量支配, 基本上按动量射流的模式运动, 在侧边卷吸周围流体向两侧扩展, 在底面也卷吸下部流体发生垂向掺混。由于浮力作用, 以及自由表面的存在, 结果使射流断面不断变形, 横向不断扩展而垂向则

图 6.49 三维表面浮射流

逐渐减薄。这个过程随着水平流速的降低而不断加快,至某一距离后垂向卷吸基本上停止,浮力起主导作用,射流向各个方向扩展,逐渐增长增宽,水域中有浮力作用的水体也增厚,受底部内界面阻力控制,这就是远区的流动,远区的边界是不断向前扩大的。当泄流时间较长,近距离流层厚度稳定后,近区与远区之间出现突变,呈内部水跃的型式。下面分析限于近区,并认为远区对它无影响。从实用上考虑,研究的内容主要为两区分界处的距离、射流的最大穿透深度、射流的中线密度、平均稀释度以及卷吸率等项。

**量纲分析** 由矩形断面泄槽流入无限水域中的表面浮射流,其流动特性可以出流断面的各项参数  $h_0$ 、 $b_0$ 、 $u_0$  及  $g_0^*$  代表,如图 6.49 所示。在高雷诺数的条件及布辛涅斯克近似假定下,设以表示射流的当地特性如纵向流速,或其积分特性如流量等等,则

这个表征射流运动特性的变量是距离  $x$  和上述射流出口各参数的函数, 即

$$= f(x, h_0, b_0, u_0, g_0^*) \quad (6.310)$$

射流在出口断面的特性也可用另外一组参数表示:

比动量通量  $m_0 = u_0^2 b_0 h_0$

比浮力通量  $B_0 = u_0 g_0^* b_0 h_0$

体积通量(流量)  $Q_0 = u_0 b_0 h_0$

出口断面水深  $h_0$

则可写  $= f(x, m_0, B_0, Q_0, h_0) \quad (6.311)$

式(6.310)中的自变量较基本、直观, 式(6.311)也有其优点, 因在某些条件下, 可以有一个或更多些自变量不重要而可不予计入, 例如在等密度情况即没有  $B_0$  项。下面按式(6.311)分析。

在式(6.311)中取  $m_0$ 、 $B_0$  为基本变量, 由量纲分析可得

$$^* = / (m_0 B_0) = f^*(x m_0^{-3/4} B_0^{1/2}, m_0^{5/4} B_0^{-1/2} Q_0^{-1}, h_0^2 m_0 Q_0^{-2}) \quad (6.312)$$

$^*$  为  $^*$  的无量纲量, 指数  $^*$ , 取决于  $^*$  的量纲, 如表 6.8 所列。

如以  $u_0$ 、 $g_0^*$ 、 $h_0$  及  $b_0$  表示, 式(6.311)成为

$$\begin{aligned} &^* = \frac{x}{(u_0^2 b_0 h_0) (u_0 g_0^* h_0 b_0)} \\ &= f^* \frac{x g_0^{*1/2}}{u_0 (h_0 b_0)^{1/4}}, \frac{u_0}{g_0^{*1/2} (h_0 b_0)^{1/4}}, \frac{h_0}{b_0} \end{aligned} \quad (6.313)$$

令  $l_0 = (h_0 b_0)^{1/2}$  作为矩形出口断面的特性长度, 而断面的深宽比为  $A = h_0 / b_0$ , 则以  $l_0$  为特性长的密度弗劳德数为

$$F_{d0} = \frac{u_0}{(g_0^* l_0)^{1/2}} = F_{d0} A^{1/4} \quad (6.314)$$

式中  $F_{d0} = \frac{u_0}{(g_0^* h)^{1/2}}$ 。则式(6.313)可写为

$$^* = \frac{x}{l_0 F_{d0}} = f^* \frac{x}{l_0 F_{d0}}, F_{d0}, A \quad (6.315)$$



式中  $l_0$  为 在出口断面的特征值；是  $F_{d0}$  的函数，符合下列关系

$$F_{d0} = m_0 B_0$$

其值见表 6.8。

表 6.8 表面射流物理量的无量纲化

物理量	量纲	$l_0$			
$l$	长度	$l_0 = h_0 b_0$	$3/4$	$-1/2$	$1$
$u$	速度	$u_0$	$-1/4$	$1/2$	$-1$
$Q$	体积流量	$u_0 h_0 b_0$	$5/4$	$-1/2$	$1$
$g^*$	加速度*	$g_0^*$	$-5/4$	$3/2$	$-1$

\* 包括与  $g^*$  成比例的各种物理量如温差、密度差等。

应用上面得到的无量纲关系式，通过射流积分模型，并根据实验和现场观测资料可得出下列一些可供实际应用的成果。

分区的过渡距离  $x_t$  二维分层剪切流的实验表明，浮力有使垂向紊动衰减的作用，当  $F_d = 1$  时，射流的垂向紊动卷吸停止，因而认为可以  $F_d = 1$  作为近区与远区过渡的一个近似准则。由此出发得出过渡距离  $x_t$  的近似关系式：

$$\frac{x_t}{l_0 F_{d0}} = 12A^{-0.2} \quad (6.316a)$$

对于  $0.1 < A < 2$ ，
$$\frac{x_t}{l_0 F_{d0}} = 15 \quad (6.316b)$$

射流最大深度  $h_{max}$  定义射流的浮力超值或温度超值小至可以忽略处的射流穿透深度为射流的最大深度，求得

$$\frac{h_{max}}{l_0 F_{d0}} = 0.42 \quad (6.317)$$

出现这个最大深度的位置  $x_{max}$  为

$$\frac{x_{max}}{l_0 F_{d0}} = 5.5 \quad (6.318)$$

射流的稳定中线浓度  $g_{cs}^*$  在远区混合过程是相当低效的，

因而射流的中线浓度, 例如超温可达到一个稳定状态, 其值可由下式求得:

$$\frac{g_{cs}^* F_{d0}}{g_0^*} = 1 + \frac{1}{F_{d0}^2} \quad (6.319a)$$

对于  $F_{d0} > 3$ , 近似有

$$\frac{g_{cs}^* F_{d0}}{g_0^*} \approx 1 \quad (6.319b)$$

$\frac{g_{cs}^*}{g_0^*}$  的倒数可作为稳定中线稀释度  $S_{cs}$ , 则对于  $F_{d0} > 3$ , 近似有

$$S_{cs} \approx 1.0 F_{d0} \quad (6.320)$$

稳定平均稀释度  $S_s$  定义射流平均稀释度  $S = Q/Q_0$ , 则和  $g_{cs}^*$  一样, 可以有一个渐近的稳定值  $S_s$ 。由分析和实验资料, 对于  $F_{d0} > 3$ , 近似有

$$S_s \approx 1.4 F_{d0} \quad (6.321)$$

射流的卷吸率  $E$  射流从边界卷吸的流量等于当地卷吸速度  $v_e$  乘射流界面微元在界面的积分, 即  $Q_E = \int_{A_s} v_e dA_s$ 。由连续性关系有

$$Q_E = Q - Q_0 \quad (6.322)$$

$$\text{以 } Q_0 \text{ 除之得 } E = S - 1 \quad (6.323a)$$

式中  $E = Q_E/Q_0$  为射流的总卷吸率。在稳定状态有

$$E_s = S_s - 1 \quad (6.323b)$$

即为总卷吸率与整体稀释度的关系。

射流的卷吸作用包括从侧边卷吸和从底部卷吸, 故可将  $E_s$  分为两部分

$$E_s = E_v + E_h \quad (6.324)$$

$E_v$  为垂向卷吸分量,  $E_h$  为水平向卷吸分量。由分析及实验对  $F_{d0} > 1$  得下列关系

$$E_v = 1.2(F_{d0} - 1) \quad (6.325)$$

$$E_h = 0.2(F_{d0} + 1) \quad (6.326)$$

从上式可见,对于大  $F_{d0}$  的情况,射流底部的垂向卷吸作用比射流侧边的水平卷吸作用大得多,当  $F_{d0}$  很大时,括号中第二项可忽略,  $E_v/E_h \approx 6$ 。因此,对于  $F_{d0}$  为中等或大值时,远区侧边环流对射流的混合能力影响较小。反之,在小  $F_{d0}$  或浅水的情况,远区环流的作用就较显著,此时射流底部的卷吸受到抑制,上面的关系式就不适用。

此外,射流的侧向扩宽和向下扩深的范围以无量纲的曲线表示如图 6.50 所示。曲线实线从原点开始是按点源考虑,即不计入

图 6.50 深水中表面浮射流的扩展<sup>[30]</sup>

射流出口的尺度,  $F_{d0}$ 。考虑射流出口的尺度时则为虚线所示, 出口断面的半宽为  $1/A^{1/2}F_{d0}$ , 深度为  $A^{1/2}/F_{d0}$ 。

**浅水的影响** 以上讨论的都属于深水情况, 深水中射流底部卷吸不受限制, 卷吸所诱导的流速小, 能保持静压条件。当受纳水域较浅时, 射流底部卷吸作用受到限制, 卷吸流动要从侧边趋近, 且在射流下部一个受限的流层范围内, 诱导流速较大, 引起较大的摩阻损耗, 压强也低于静压。如水足够浅, 射流变成完全和槽底接触, 垂向卷吸被消除, 射流的动量损耗更多些。结果是减低了混合能力并使射流断面变形。浅水使射流的性质发生不少变化。

浅水情况的数模工作显然更困难些。下面仍只讨论将上述量纲分析扩大到浅水情况, 结合实验资料提供一个区分深水与浅水的准则, 以及近似估算稳定稀释度的方法。

设表面射流的泄槽出口是以跌坎的形式和下游水域底面连接, 下游底面水平, 水深  $H$  为常数。忽略下游底面阻力, 在此简化条件下, 量纲分析中只增加一个变量  $H$ 。射流特性参数的无量纲式(6.315)应改为

$$^* = \frac{x}{l_0 F_{d0}} = f^* \left( \frac{x}{l_0 F_{d0}}, \frac{H}{l_0 F_{d0}}, F_{d0}, A \right) \quad (6.327)$$

当  $H$  不太小, 射流不接触底面, 仍存在最大穿透深度  $h_{max}$  时, 因  $h_{max}$  和  $l_0 F_{d0}$  相关(见式 6.317), 式(6.327)中的  $H/l_0 F_{d0}$  项可以  $h_{max}/H$  代替, 则得

$$^* = f^* \left( \frac{x}{l_0 F_{d0}}, \frac{h_{max}}{H}, F_{d0}, A \right) \quad (6.328)$$

如果泄槽出口不是跌坎而是斜坡的形式, 上式中的  $H$  可取出现  $h_{max}$  处的水深值, 也会近似符合相同的函数关系。

为进一步简化, 引入一个衡量浅水影响的稀释折减系数  $r_s$ , 定义为

$$r_s = \frac{S_{cs}}{S_{cs}} \quad (6.329)$$

$S_{cs}$  为深水射流中线稀释度的推算值,  $S_{cs}$  为浅水射流中线稀释度的观测值。将  $r_s$  与  $h_{max}/H$  的相关按各家实验资料整理如图 6.51 所示。从图中可得出两个成果:

(1) 深水与浅水的分区可以大致按

$$\frac{h_{max}}{H} = 0.75 \quad (6.330)$$

划分。 $h_{max}/H < 0.75$ ,  $r_s = 1$  为深水区;  $h_{max}/H > 0.75$  为浅水区,  $r_s < 1$ 。

(2) 在浅水区范围, 稀释折减系数与  $h_{max}/H$  关系可用下式表示:

$$r_s = \frac{0.75}{h_{max}/H}^{0.75} \quad (6.331)$$

图 6.51 浅水表面浮射流稀释度折减系数<sup>[30]</sup>

受纳水域中横流的影响 以上讨论的都属受纳水域是静止的情况。当表面浮射流射入横流中时, 射流受横流作用发生弯曲, 由起始时和横流成一定的入射角  $\theta_0$  逐渐转为和横流平行, 其物理

力学作用及发展过程与 6.5 节讨论的横流中的淹没射流类似,需要补充的是,在表面泄流是从接纳水域(如河流)的侧边进入,以后可能出现两种情况,一种是射流逐渐在水域中扩展,不再触及边界;另一种是射流弯转后不远即接触岸边,以后即贴附边界继续向前流动,在近区形成回流,分别如图 6.52(a)及(b)所示。出现回流后射流的卷吸和掺混作用都受到影响,特别是在浅水情况,其影响更大。因此确定区分这两种情况出现的准则成为需要研究的项目。

图 6.52 触岸与不触岸的表面射流<sup>[30]</sup>

在有横流的情况,影响射流运动的参数比静止水域情况多了一个横流的流速  $u_a$ , 或其相应无量纲数,即流速比  $R_a = \frac{u_a}{u_0}$  (在 6.5 节采用流速比  $R = u_0 / u_a$ , 两者互为倒数), 以及入射角  $\theta_0$ , 因此射

流特性变量的无量纲函数表达式(6.328)应改为

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}}{F_{d0}} = f^* \left( \frac{x}{l_0 F_{d0}}, \frac{h_{max}}{H}, R_a, F_{d0}, A, \theta \right) \quad (6.332)$$

对于射流回触岸边的准则,  $R_a$  大时容易发生触岸,  $h_{max}/H$  包括了浮力和环境水深的作用, 所以这两个因素是主要的。文献 [30] 定义近岸折减重力加速  $g_b^* > \frac{1}{2} g_0^*$  时作为射流触岸的标准, 收集了前人许多实验资料整理, 点绘在  $R_a \sim h_{max}/H$  的对数格纸上, 发现在低  $R_a$ , 低  $h_{max}/H$  时大都是不触岸的。对于水域很深, 当  $h_{max}/H < 0.1$  时, 任何情况都不发生触岸。建议在  $\theta = 90^\circ$  时, 下式可作为射流回触岸边的准则:

$$R_a > 0.05 \frac{h_{max}}{H}^{-3/2} \quad (6.333)$$

对于深水中不触岸情况的射流轴线轨迹, 应和  $m_0$ 、 $B_0$  及  $u_a$  有关, 该文给出  $\theta = 90^\circ$  时的无量纲函数如下:

$$\frac{y}{m_0^{1/2}/u_a} = f \left( \frac{x}{m_0^{1/2}/u_a}, \frac{B_0^{1/2}}{m_0^{1/4} u_a} \right) \quad (6.334)$$

或

$$\frac{y R_a}{l_0} = f \left( \frac{x R_a}{l_0}, \frac{1}{R_a F_{d0}} \right) \quad (6.335)$$

这个函数关系还未能定出。可以看到括号中的第 2 项  $(R_a F_{d0})^{-1}$  是代表浮力作用的, 当  $R_a F_{d0} \gg 1$ , 浮力作用是重要的; 反之如  $R_a F_{d0} \ll 1$ , 则浮力作用是次要的。对于无浮力射流, 这项可以去掉。Wright<sup>[31]</sup> 对淹没射流, 曾给出下列关系式:

$$\text{对射流的前段} \quad \frac{x R_a}{l_0} = 2.0 \frac{y R_a}{l_0}^{1/2} \quad (6.336)$$

$$\text{对射流的后段} \quad \frac{x R_a}{l_0} = 2.0 \frac{y R_a}{l_0}^{1/3} \quad (6.337)$$

将前人许多表面浮射流的实验资料点绘  $\frac{x R_a}{l_0} \sim \frac{y R_a}{l_0}$  的关系如图 6.53 所示, 可以看到实验点基本上和上两式的线相当接近, 表明

其变化趋势是颇为一致的。当然这里有一定的系统偏差,反映浮力影响的存在。

图 6.53

近年在表面浮射流方面的研究工作很多,上面只介绍了其中一种方法及其主要成果。

我国水利水电科学研究院冷却水所对电厂排放的热水射流做过不少研究工作,对二维温差出流的局部掺混研究<sup>[32]</sup>,冷却池的物理模型试验和数值模型计算都有不少成果。近年还开展了应用紊流  $k-\epsilon$  二方程模型计算浮力回流,取得一定的成果<sup>[33]</sup>。

例题 6.5 某热电厂的冷却水(热水)从排水渠末端口门泄入一个浅水湖中,渠道末端为一跌坎,出口水深  $h_0 = 1.5\text{m}$ ,口门宽  $b_0 = 3.0\text{m}$ ,流速  $u_0 = 1.5\text{m/s}$ ,湖内水深  $H = 4.0\text{m}$ ,排出水温  $T_0 = 36.5^\circ\text{C}$ ,密度  $\rho_0 = 993.5\text{kg/m}^3$ ,湖水自然水温  $T_a = 22.5^\circ\text{C}$ ,密度  $\rho_a$



= 997.3 kg/m<sup>3</sup>。求泄出冷却水在湖内扩散后达到的稳定中线稀释度。

[解] 已知  $h_0 = 1.5\text{m}$ ,  $b_0 = 3.0\text{m}$ ,  $u_0 = 1.5\text{m/s}$ ,  $H = 4.0\text{m}$ 。

则 深宽比  $A = h_0/b_0 = \frac{1.5}{3} = 0.5$

特性长度  $l_0 = (h_0 b_0)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4.5} = 2.12\text{m}$

现 热水密度  $\rho_0 = 993.5\text{kg/m}^3$ , 湖水密度  $\rho_a = 997.3\text{kg/m}^3$ ,  
计算

$$g_0^* = \frac{\rho_a - \rho_0}{\rho_a} g = \frac{997.3 - 993.5}{997.3} g = 0.0038g$$

$$F_{d0} = \frac{u_0}{(g_0^* l_0)^{1/2}} = \frac{1.5}{0.0038 \times 9.8 \times 2.12} = 5.34 > 3$$

由式(6.320)可得不考虑底面影响时的稳定中线稀释度

$$S_{cs} = \frac{g_0^*}{g_{cs}} \quad F_{d0} = 5.34$$

射流最大深度  $h_{\max}$  可由式(6.317)推求

$$h_{\max} = 0.42 l_0 F_{d0} = 0.42 \times 2.12 \times 5.34 = 4.75\text{m}$$

$$\frac{h_{\max}}{H} = \frac{4.75}{4.0} = 1.188 > 0.75 \text{ 属于浅水情况}$$

$$\text{稀释折减系数 } r_s = \frac{0.75}{h_{\max}/H}^{0.75} = \frac{0.75}{1.188}^{3/4} = 0.709$$

故浅水情况的稳定中线稀释度为

$$\begin{aligned} S_{cs} &= r_s S_{cs} = 0.709 \times 5.34 \\ &= 3.78 \end{aligned}$$

限于篇幅,在本章只介绍了上面几节主要内容。和环境工程有关的其他种类射流还有不少,如浅水淹没射流,多孔射流,附壁射流,波浪中与回荡水流中的射流等,读者可参考有关射流的专著[21, 24, 34]和近年有关文献[49, 50]。

# 第七章 分 层 流

## 7.1 概 述

目前在欧美分层流(stratified flows)是指密度不均匀的流体运动,在可压缩气体则是指熵不均匀的流动<sup>[35]</sup>。在日本称为密度流<sup>[9]</sup>。我国从50年代开始,采用了异重流的名称,相应于国外density currents的内容。

实际流体中出现分层的现象是相当多的。例如,对于静止流体情况,大气由于重力作用,近地面密度大,高空密度小而形成各种层次;深的湖泊、水库和海洋由于日照作用,表面温度高、密度小,深层温度低、密度大,常出现明显的分层。这些情况中流体内部密度的变化主要在铅垂方向,在水平方向则几乎没有变化。对于流动的流体情况,如水库中由河流注入水库的含沙浑水在一定条件下会在库底形成一股潜流,称为泥沙异重流;工业冷却水排入河、湖中时,沿表面水温高,下部水温低,也会发生温差异重流;在河流出口处,淡水与海中盐水会出现明显的分界面,称为盐水楔;但也有淡水和盐水良好混合,没有明显分界面形成密度连续梯度的变化情况。前章讨论的浮羽流和浮射流也是有密度连续梯度变化的例子。因此分层流可分为两种类型:一种是密度不同的流体有明显的内部分界面(interface)的分层流;另一种是密度不同的流体相互掺混形成连续密度梯度场的分层流。

根据这些现象。可以对分层流作这样的理解:在重力场中密度

(或熵)不均匀的流体形成有层次的流动,其密度变化主要在铅垂方向而形成近于水平的层次。当各层流体存在明显的内界面则常称为异重流,是本章主要讨论的内容。

流体密度差形成的原因主要为温度、含沙量或含盐量的差异。一般冷热水的温度差为  $T = 10$  时,两者的相对密度差  $\rho / \rho_0 = 0.003$ ; 含沙浑水与清水的  $\rho / \rho_0 = 0 \sim 0.02$ ; 海水和淡水的  $\rho / \rho_0 = 0.02 \sim 0.03$ 。

下面按流动性质取对环境有关内容进行讨论。

## 7.2 静止流体的分层与稳定

### 一、湖泊、水库和海洋中水体的分层

一般较浅的静止水体中密度变化不大,多不考虑分层。在较深的水体如湖泊、水库和海洋中,则常要考虑水体温度垂向变化的影响。

湖泊和水库中水体的垂向温度分布随季节而变化。早春时接近等温状态,其后因太阳辐射受热,表层变暖,邻近表面的涡旋和对流作用产生垂向混合,形成一个温度相当均匀的近面水层,称为温水层(epilimion)。在深层的水体仍保持低温状态,称为深水层(hypolimion)。两者之间有一层温度急剧变化的过渡水层,称为温跃层或斜温层(metalimion),该层中温度梯度最大的点称为温倾点(thermocline),如图 7.1 所示。这个较稳定的分层结构维持至夏末秋初,秋凉后水面变冷,冷水密度大,下面的暖水密度小,这种情况是不稳定的,因而产生自然对流,促进垂向混合,使水体的温度又趋于均匀状态。这种湖泊和水库中出现的水体分层现象,对水中营养物质、污染物质和生物成分的分布都会有影响。人们还可利用这种水体沿垂向分层的特征,考虑在不同高程取水,以满足工业或农业上对适宜水温的用水需要,这就提出选择取水问题的研究。

图 7.1 湖泊和水库的温度分层

在海洋中同样存在海水分层的现象,因海水很深,各层的尺度就较大。在温度方面,海洋的垂向剖面也呈现三层结构,如图 7.2(a)所示。在低纬度地区的全年和中纬度地区的夏季,表层出现温水层,由于波浪产生垂向混合,温水层的厚度可达 500m。在赤道带其温度为 20~25℃。温水层以下为温跃层。再以下为很冷的深层,其底部附近的温度在 0~5℃ 的范围。在南、北极地区,这三层为一个单一的冷水层所代替,如图 7.2(c)。在低纬度地区盐度也有三层结构如图 7.2(b)所示。在较薄的表层是一个均匀的高盐度层,表层下面是一个盐度迅速减小的盐跃层(halocline),这层以下是一个较均匀的低盐度深层。

## 二、大气的分层

由于地球的引力作用、太阳的辐射及其他因素的影响,整个大气的构造是复杂而不均匀的。目前世界气象组织根据大气的温度

图 7.2 海洋的分层结构

和水气的铅垂分布、扰动程度、电离现象等不同性质,统一规定将大气在铅垂方向分为 5 层,由下而上依次为:对流层、平流层、中间层、热成层和外大气层。和地球环境关系较密切的最接近地面的对流层又可分为对流下层、对流中层、对流上层和对流层顶。各层的高度和温度范围如图 7.3 所示。在平流层,气流以水平运动为主,平稳而无云,扩散作用十分缓慢。能吸收太阳紫外线从而对地球环境有重要影响的臭氧层即在平流层内。在对流层则有强烈的对流

图 7.3 大气的分层

运动,高低层的气体产生交换与混合。对流上层中有强风,风速达  $30\text{m/s}$ 。对流中层的上部的气压约为  $1/2$  个大气压,在这层有云并发生降水。对流下层受地面引起的摩阻影响较大,对流和紊动均较强,昼夜温差大,可达  $30 \sim 40$  。在对流层中,平均每升高  $100\text{m}$ ,温度约降低  $0.65$  ,温度和湿度的水平分布也不均匀。

### 三、大气的平衡

在高度差不太大的范围内可不考虑气体的压缩性,压强与高度的关系为  $dp = w dz$ ,  $w$  是大气的重度,可看作常数。在高度差范围较大如达几公里时,就要考虑压缩性。现限于讨论较为重要的等温情况,此时气体的重度与压强成正比:

$$w = w_0 \frac{p}{p_0} \quad (7.1)$$

式中  $p_0$  和  $w_0$  是地面  $z=0$  处大气的压强和重度,  $p$  和  $w$  是高度为  $z$  处的压强和重度, 于是有

$$\int_0^z dz = \frac{p_0}{p} \frac{dp}{w}$$

以式(7.1)代入得

$$z = \frac{p_0}{w_0} \frac{p_0}{p} \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{w_0} \ln \frac{p_0}{p} \quad (7.2)$$

式中  $p_0/w_0$  为地面上等重度  $w_0$  的气柱高, 即均质大气高度, 以  $H_0$  表示, 则

$$z = H_0 \ln \frac{p_0}{p} \quad (7.2a)$$

对于高度为  $z_1$  及  $z_2$  两点的压强为  $p_1$  及  $p_2$ , 就得

$$z_1 - z_2 = H_0 \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (7.3)$$

此式一般称为气压高度公式。或写为

$$p = p_1 e^{-(z-z_1)/H_0} \quad (7.4)$$

表示压强在垂向分布的关系, 如图 7.4 所示。这个关系可用于计算大气压及通过测量气压差来确定某处的高程。

#### 四、分层流体平衡的稳定

对于不可压缩流体, 当密度随高度增加而减小, 即  $\frac{d\rho}{dz} < 0$  时, 如果在流体中的一个微团因受扰动而向上移动, 此时周围流体的

密度小于微团本身的密度, 微团受到的浮力小于重力, 微团将下沉; 反之, 如微团向下移动, 浮力将大于重力而使微团回升, 故两种情况下微团都能恢复到平衡位置。所以这种密度分布的分层是稳定的。相反, 如果  $\frac{d}{dz} > 0$ , 按同样推理可知是不稳定的。

对于可压缩流体, 当微团移动进入不同压强的区域后, 本身的密度也随之改变, 故稳定与否不能用上述的简单分析, 而要看微团密度改变后与周围流体密度的比较才能确定。设微团向上移动, 移动前的压强为  $p_1$ , 密度为  $\rho_1$  与周围流体相同, 上移后密度改变为  $\rho_2$ , 按等熵过程应有下列关系

$$\frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \quad (7.5)$$

式中  $\gamma = c_p / c_v$ ,  $c_p$  为定压比热,  $c_v$  为定容比热。熵  $s$  的表达式为

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const} \quad (7.6)$$

如果熵随高度增加而增加, 即  $\frac{ds}{dz} > 0$  亦即  $\frac{d}{dz} \frac{p}{\rho^\gamma} > 0$ , 则对周围流体有

$$\frac{p_2}{\rho_2^\gamma} > \frac{p_1}{\rho_1^\gamma}$$

和式(7.5)比较可见  $\rho_2 < \rho_1$ , 微团所受浮力小于重力而下沉, 恢复原来平衡位置。如果微团向下移动, 按同法分析可知受到的浮力会大于重力, 使微团回升, 也能恢复平衡。所以稳定分层的分布条件是熵随高度增加, 即  $\frac{ds}{dz} > 0$ , 或  $\frac{d}{dz} \frac{p}{\rho^\gamma} > 0$ 。反之, 如果  $\frac{ds}{dz} < 0$ , 则按同法可推知是不稳定的。

在大气中绝热分层的特征是, 大约每升高 100m, 温度下降  $1^\circ\text{C}$ 。可推证如下: 由绝热关系

$$w = w_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$



代入  $dp = -w dz$  关系式, 积分可求得

$$z = \frac{H_0}{\gamma} \left( 1 - \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \quad H_0 = \frac{p_0}{w_0}$$

或 
$$p = p_0 \left( 1 - \frac{\gamma z}{H_0} \right)^{\gamma}$$

由状态方程及  $p_0/w_0 = H_0$  可得

$$\frac{RT}{mg} = \frac{p}{w} = H_0 \left( 1 - \frac{\gamma z}{H_0} \right)^{\gamma}$$

因此

$$\frac{dz}{dT} = - \frac{R}{(\gamma - 1) mg}$$

对于常温的空气,  $R/mg = 29.4\text{m/K}$ , 所以  $\frac{dz}{dT} = -102\text{m/K}$ 。小于这个温度降低率就表示大气是稳定的。通常在自由大气中不存在大于  $1/100\text{m}$  的情况, 因为这相应于不稳定状态。但当地面的温度高于邻近地面的空气的温度时会发生这种情况, 此时空气就会不平衡而到处上下对流。

### 7.3 明槽中二层异重流

对于流动状态下的分层流体, 将从明槽中二层异重流开始讨论。这是水环境中常遇到的重要而又较简单的情况, 可按不可压缩一维的二层流动分析。

先引入密度弗劳德数  $F_d$ , 也称内部弗劳德数的概念。考虑在静止流体的下部潜入一股较重的流体, 越过障碍物下流如图 7.5 所示。流体的密度上层为  $\rho_1$ , 下层为  $\rho_2$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ , 两层流体间具有明显的内界面。忽略粘滞性, 则内界面上流速可不连续, 但压强则是连续的。取内界面上在障碍物上下游的两点 a 和 b, 对下层流体应用伯努利方程可写

图 7.5 明槽二层异重流

$$p_a + \rho_2 \frac{u_a^2}{2} + \rho_2 g z_a = p_b + \rho_2 \frac{u_b^2}{2} + \rho_2 g z_b \quad (7.7)$$

对上层静止流体有

$$p_a + \rho_1 g z_a = p_b + \rho_1 g z_b \quad (7.8)$$

令

$$H = z_a - z_b = z_2 - z_1$$

将(7.7)、(7.8)两式相减可得

$$\frac{u_b^2 - u_a^2}{2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} g H \quad (7.9)$$

如果上层流体为空气, 下层流体为水, 则  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1$ 。上式就和明槽中水流的情况相同。由此可以推论, 异重流的下层流动可以用一般明槽水流比拟, 只需将重力加速度  $g$  乘以一个折减系数  $\sigma = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ 。  $g$  也有用  $g^*$  表示, 称为折减重力加速度。

在一般明槽水流, 衡量惯性力与重力对比的无量纲数是弗劳德数  $Fr = u / \sqrt{gL}$ 。在二层异重流, 衡量惯性力与有效重力对比的无量纲数相应为密度弗劳德数  $F_d$ :

$$F_d = \frac{u}{\sqrt{\sigma g L}} = \frac{u}{\sqrt{g L}} = \frac{u}{\sqrt{g^* L}} \quad (7.10)$$

式中  $L$  为特征长度, 一般用水深  $h$ ;  $u$  为特征流速, 一般用断面平均流速  $v$ 。事实上密度弗劳德数  $F_d$  是表征异重流特性的一个重要参数, 它比弗劳德数  $Fr$  更具普遍性。

下面分别介绍几种定常的二层异重流情况。

### 一、下层均匀流动

这种流动是设上层流体基本上静止, 下层流体作沿程等速的均匀流动。当浑水潜入深水库的底部, 在底坡上作长距离的流动时会近似出现这种均匀流, 事实上是一种极限情况。

如上层水深很大, 由下层拖曳诱生的上层中的流速是很小的, 可以忽略。下层流动的情况如图 7.6 所示。按二维流动考虑, 对于均匀流重力和阻力平衡, 就有

$$\tau_b + \tau_i = \rho_2 g h_2 \sin i \quad (7.11)$$

图 7.6 下层均匀异重流

式中  $\tau_b$  为底面切应力,  $\tau_i$  为内界面切应力,  $h_2$  为水深,  $\theta$  为底坡,  $\rho$  为密度。具有不能忽略的内界面阻力, 这是和有自由面的明槽均匀流不同之处。切应力呈直线分布, 从底面最大值  $\tau_b$  递减至最大流速  $u_m$  处变为零, 再增至内界面为  $\tau_i$ 。令  $\tau_i = \tau_b$ , 由图 7.6 可推得

$$\tau_i = \frac{\tau_b}{b} = \frac{1 - y_m/h_2}{y_m/h_2} \quad (7.12)$$

故  $\tau_i$  取决于槽底切应力和最大流速点的位置。将式(7.12)代入式(7.11)消去  $\tau_i$  得到

$$\tau_b = \frac{1}{1 + \dots} \rho g h_2 \sin \theta \quad (7.13)$$

而  $\tau_b$  也可表示为 
$$\tau_b = \frac{f_b}{4} \rho V^2 \quad (7.14)$$

式中  $f_b$  为槽底摩阻损失系数,  $V$  为下层的断面平均流速。比较(7.13)、(7.14)两式可得

$$V = \sqrt{8g \frac{h_2 \sin \theta}{f_b (1 + \dots)}} \quad (7.15)$$

此式即为明槽均匀流的通式。对于有自由面的明槽水流,  $\theta = \theta$ ,  $\tau_i = 0$ ,  $h_2 = R$ ,  $R$  为水力半径, 令  $\sin \theta = i_b$ ,  $8g/f_b = C$ , 式(7.15)就成为谢才公式:

$$V = C \sqrt{R i_b} \quad (7.16)$$

如流动为层流, 内界面光滑而清晰, 依本和哈利曼(Ippen, A. T. and Harleman, D. R. F, 1952)曾分析得到切应力比  $\tau_i/\tau_b$  和摩阻系数  $f$  与雷诺数的关系<sup>[37]</sup>。定常均匀层流的运动方程为

$$-\frac{1}{X} \frac{p}{\rho} + gz + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (7.17)$$

则水力坡度为

$$-\frac{1}{X} \frac{p}{\rho} + z =$$

$$= - \frac{1}{x} \frac{g H_1 + g(h_2 - y) \cos \alpha}{2g} + (z_b + y \cos \alpha)$$

因  $H_1 + H_2 = \text{const}$ ,  $-\frac{H_1}{x} = -\frac{H_2}{x}$ , 上式可写为

$$-\frac{p}{x} \frac{1}{2g} + z = -\frac{1}{x} \frac{h_2^2 - y^2}{2} H_2 = \sin \alpha \quad (7.18)$$

将上式代入式(7.17)得

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -g \sin \alpha \quad (7.19)$$

在边界条件:  $y=0$  时  $u=0$ ;  $y=h_2$  时  $u=u_i$  之下, 将式(7.19)积分两次得到流速分布  $u(y)$  以及断面平均流速如下:

$$u = \frac{h_2^2 g \sin \alpha}{2} \frac{y}{h_2} - \frac{y^2}{h_2^2} + u_i \frac{y}{h_2} \quad (7.20)$$

$$V = \frac{u_i}{2} + \frac{1}{6} \frac{h_2^2 g \sin \alpha}{2} \quad (7.21)$$

引入无量纲参数  $J$ :

$$J = \frac{V}{h_2 g \sin \alpha} = \frac{V^2}{gh_2} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{V h_2 / \alpha} = \frac{F_d^2}{\text{Re} \alpha \sin \alpha} \quad (7.22)$$

式中取  $F_d = \frac{V}{gh_2}$ ,  $\text{Re} = \frac{V h_2}{\alpha}$ 。

可见  $J$  数表示粘性力与有效重力的对比。应用  $J$  数可将流速分布关系式写为

$$\frac{u}{V} = 1 + 2 \frac{y}{h_2} - \frac{1}{2J} \frac{y^2}{h_2^2} + \frac{1}{3} \frac{y}{h_2} - \frac{1}{12} \quad (7.23)$$

由此并可求得最大流速  $u_m$  的位置  $y_m$  及内界面流速  $u_i$  与  $u_m$  的关系:

$$\frac{y_m}{h_2} = 2J + \frac{1}{3} \quad (7.24)$$

$$\frac{u_i}{u_m} = \frac{12J - 1}{12J^2 + 4J + \frac{1}{3}} \quad (7.25)$$

由式(7.15)得

$$f_b = \frac{8}{1 + \frac{gh_2 \sin}{V^2}} = \frac{8}{1 + \frac{\sin}{F_d^2}} = \frac{8}{(1 + \dots) J Re} \quad (7.26)$$

由实验求得  $y_m/h_2 = 0.61$ ,  $u_i/u_m = 0.59$ 。故由式(7.24)得  $J = 0.14$ , 由式(7.12)得  $\dots = 0.64$ 。用这些数值得

$$V = \frac{0.14h_2^2 g \sin}{\dots} \quad (7.27)$$

$$f_b = \frac{35.3}{Re} \quad f_i = \frac{22.6}{Re} \quad (7.28)$$

这些成果得到  $Re = \frac{Vh_2}{\nu} = 1000$  的层流实验的证实。当雷诺数再增大, 下层流动将转变为紊流。

当下层流动为紊流, 内界面上发生掺混, 就难以详细分析。根据巴塔(Bata)等的实验, 最大流速的位置在  $y_m/h_2 = 0.7$  处, 相应的  $\dots = 0.43$ 。看不到流动随  $Re$  数系统变化。对于摩阻系数  $f_b$ , 如近似采用明槽水流的公式, 例如曼宁公式  $f_b = 8gn^2/h^{1/3}$ , 则由式(7.15)可得平均流速的近似公式<sup>[9]</sup>:

$$V = \frac{1}{n} \frac{h_2^{2/3} \overline{\sin}}{1 + \dots} \quad (7.29)$$

式中  $n$  为糙率, 可取 0.43。

## 二、二层定常非均匀渐变流方程

实际出现的明槽二层异重流如水库中的泥沙异重流和冷却水排放的温差异重流等多为非均匀流。现从普遍的情况讨论, 图 7.7 表示二层非均匀渐变的异重流, 上下层的密度为  $\rho_1$  和  $\rho_2$ ,  $\rho_2 > \rho_1$  的情况。底坡和内界面坡均不大, 属渐变流, 断面上压强为静压分布, 可和明槽水流一样按一维总流处理, 只是在下层流中将重力改

图 7.7 二层非均匀异重流

为有效重力, 即将  $g$  改为  $-g = -g$ 。现对两层分别列出其运动方程组如下。

上层流动的能量方程为

$$\frac{1}{g} \frac{V_1}{t} + \frac{1}{x} \frac{V_1^2}{2g} + \frac{1}{x} z_1 + \frac{p_1}{1g} + \frac{h_{f1}}{x} = 0 \quad (7.30)$$

因  $\frac{1}{x} z_1 + \frac{p_1}{1g} = -\frac{1}{x}(z_0 + h_1 + h_2)$ ,  $\frac{z_0}{x} = -i_b$ ,  $\frac{h_{f1}}{x} = i_{f1}$ ,

式(7.30)成为

$$\frac{1}{g} \frac{V_1}{t} + \frac{1}{x} \frac{V_1^2}{2g} + \frac{h_1}{x} + \frac{h_2}{x} - i_b + i_{f1} = 0 \quad (7.31)$$

连续方程为 
$$\frac{A_1}{t} + \frac{Q_1}{x} = 0 \quad (7.32)$$

对于宽矩形槽为 
$$\frac{h_1}{t} + \frac{1}{x}(V_1 h_1) = 0 \quad (7.33)$$

下层流动的能量方程为

$$\frac{1}{g} \frac{V_2}{t} + \frac{1}{x} \frac{V_2^2}{2g} + \frac{1}{x} z_2 + \frac{p_2}{2g} + \frac{h_{f2}}{x} = 0 \quad (7.34)$$

因  $\frac{1}{x} z_2 + \frac{p_2}{2g} = -\frac{1}{x}(z_0 + h_2) + \frac{1g h_1}{2g}$

$$= -i_b + \frac{h_2}{x} + \frac{2}{2} \frac{h_1}{x}$$

$$\frac{h_{f2}}{x} = i_{f2},$$

式(7.34)成为

$$\frac{1}{g} \frac{V_2}{t} + \frac{1}{x} \frac{2V_2^2}{2g} + 1 - \frac{h_1}{x} - i_b + i_{f2} = 0 \quad (7.35)$$

连续方程为 
$$\frac{A_2}{t} + \frac{Q_2}{x} = 0 \quad (7.36)$$

对于宽矩形槽为

$$\frac{h_2}{t} + \frac{1}{x}(V_2 h_2) = 0 \quad (7.37)$$

式中  $A_1$ 、 $A_2$  分别为上、下层的过水断面,  $Q_1$ 、 $Q_2$  分别为上、下层的流量,  $i_{f1}$ 、 $i_{f2}$  分别为上、下层的摩阻坡度。

对定常流动  $\frac{d}{dt} = 0$ , 宽矩形槽  $\frac{A}{t} = 1$ , 并引入密度弗劳德数

$$F_{d1} = \frac{V_1}{\sqrt{gh_1}}, F_{d2} = \frac{V_2}{\sqrt{gh_2}}; \quad \frac{1}{2},$$

又因  $\frac{d}{dx} \frac{V^2}{2g} = \frac{d}{dx} \frac{q^2}{2gh^2} = -\frac{q^2}{gh^3} \frac{dh}{dx} = -\frac{V^2}{g h} \frac{dh}{dx} = -F_d^2 \frac{dh}{dx}$ ,

$q$  为单宽流量,  $q = Vh$ , 代入能量方程(7.31)、(7.35), 分别得

上层:  $(1 - F_{d1}^2) \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} = i_b - i_{f1} \quad (7.31a)$

下层:  $(1 - F_{d2}^2) \frac{dh_1}{dx} + (1 - F_{d2}^2) \frac{dh_2}{dx} = i_b - i_{f2} \quad (7.35a)$

从上两式可解出

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{-F_{d2}^2(i_b - i_{f1}) + \frac{1}{2}(i_{f2} - i_{f1})}{1 - F_{d1}^2 - F_{d2}^2 + F_{d1}^2 F_{d2}^2} \quad (7.38)$$

$$\frac{dh_2}{dx} = \frac{-F_{d1}^2(i_b - i_{f2}) + \frac{1}{2}(i_{f1} - i_{f2}) + i_b - i_{f1}}{1 - F_{d1}^2 - F_{d2}^2 + F_{d1}^2 F_{d2}^2} \quad (7.39)$$



式中上、下两层的摩阻坡度(单位距离上的沿程水头损失)为

$$i_{f1} = \frac{i}{gh_1} = \frac{f_i}{8} \frac{V_1 - V_2}{V_1 - V_2} \quad (7.40)$$

$$i_{f2} = \frac{i}{2gh_2} = \frac{f_b}{8} \frac{V_2}{gh_2} - \frac{f_i}{8} \frac{V_1 - V_2}{gh_2} \quad (7.41)$$

(7.38)、(7.39)两式是二层定常非均匀渐变流的基本关系式,在普遍情况下求解还是困难的。但在特殊情况下,如其中有一层的流速为零,并设  $f_i$  和  $f_b$  均为常数,则能解出水深的变化,从而定出内界面的形状。水库中的含沙异重流是上层  $V_1 = 0$  的例子。河口的盐水楔及工业冷却水沿表面排入深湖的温差异重流则是  $V_2 = 0$  的实例。

在式(7.38)、(7.39)中,当分母等于零时,  $\frac{dh}{dx}$ , 为临界流态。如忽略  $F_{d1}^2 F_{d2}^2$  项,则在临界断面处有下列关系

$$1 - F_{d1}^2 - F_{d2}^2 = 0 \quad (7.42)$$

### 三、盐水楔

在河口当河流的淡水流入海中盐水之内时,就会在一定范围内出现盐水、淡水分界的二层流动,称为盐水楔(saline wedge)。设盐水楔中下层海水基本上静止,  $V_2 = 0$ , 主要只有上层淡水的流动,如图 7.8 所示。则按上面分析可推求内界面的形状如下。

水面坡度为

$$I_w = - \frac{d}{dx} (z_0 + h_1 + h_2) = i_b - \frac{d}{dx} (h_1 + h_2)$$

以式(7.38)、(7.39)代入,并忽略分母中的  $F_{d1}^2 F_{d2}^2$  项,得

$$I_w = \frac{i_{f1}(1 - F_{d2}^2) - i_{f2}F_{d1}^2}{1 - F_{d1}^2 - F_{d2}^2} \quad (7.43)$$

图 7.8 盐水楔

现  $V_2 = 0, F_{d2} = 0$ , 由式(7.43)及式(7.38)得  $I_w / \frac{dh_1}{dx} = 0$  ( ), 即水面坡度比内界面坡小得多, 故可认为水面近似是水平的。同时河口段底坡也可近似取  $i_b = 0$ , 则  $h_1 + h_2 = h = \text{const}$ 。再以式(7.40)的  $i_{f1}$  代入式(7.38), 得到

$$\frac{dh_1}{dx} = \frac{-\frac{f_i}{8} F_{d1}^2 \frac{h}{h-h_1}}{1-F_{d1}^2} = \frac{-\frac{f_i}{8} \frac{q_1^2}{gh_1^3} \frac{h}{h-h_1}}{1-\frac{q_1^2}{gh_1^3}} \quad (7.44)$$

在河口入海的淡水已扩展成薄层, 则可考虑在河口断面临界流动的条件成立, 即  $1-F_{d1}^2 = 0$ , 该处水深为临界水深

$$h_{1c} = \frac{q_1^2}{g}^{1/3} \quad (7.45)$$

令  $\eta = \frac{h_1}{h}, F_{d0} = \frac{q_1}{gh_1^3}, \eta_c = \frac{h_{1c}}{h} = F_{d0}^{2/3}$ , 并设内界面的摩阻系数  $f_i$

为常数, 式(7.44)的积分成为

$$\frac{1}{F_{d0}^2} (1 - \frac{x}{h}) - \frac{1}{F_{d0}^2} (1 - \frac{x}{h})^3 = \frac{f_i}{8} \frac{x}{h} \quad (7.46)$$

由上式  $x \sim h$  的关系即可得到盐水楔的内界面形状。取  $x = L$ ,  $\frac{x}{h} = 1$  即可得计算盐水楔长度  $L$  的关系式

$$f_i \frac{L}{2h} = \frac{1}{5F_{d0}^2} - 2 + 3(F_{d0})^{2/3} - \frac{6}{5} (F_{d0})^{4/3} \quad (7.47)$$

摩阻系数  $f_i$  值对计算结果影响很大。 $f_i$  值的测定,可按实测的楔长  $L$  用式(7.47)求  $f_i$  的平均值;也可应用式(7.44)求局部的  $f_i$  值。也有通过实验资料的整理,得到计算  $f_i$  的经验公式,日本今子安雄(1966)提出的经验公式为<sup>[9]</sup>

$$f_i = 0.8 \frac{V_1^3}{g}^{-1/2} \quad (7.48)$$

上面分析假定  $V_2 = 0$ ,实际上由于上层流体的拖曳作用,下层盐水会出现一定的回流。内界面流速  $u_i$  约为  $0.6V_1$ 。实际中如考虑潮汐引起水流的回荡,则分析海水入侵问题就更复杂些。

#### 四、内水跃

二层流的内界面在一定条件下会出现突然升高(或降低)的现象称为内水跃(internal hydraulic jump)。这时流动参量发生强间断。这种现象在大气和水中都会发生。国外对内水跃的研究不少,主要在 50 年代<sup>[36]</sup>。现扼要介绍易家训和古那(Guna)的工作。他们分析时应用一维总流的动量方程和连续方程,并设内界面和底面的摩擦阻力可以忽略,认为水跃前后的流动其断面上的压强可用静压分布近似,对底面为水平的情况进行分析。实际上和分析一般明槽中水跃的方法相同。

设内水跃前后的流动如图 7.9 所示。其中(a)为内界面突升的情况,(b)为内界面突降的情况。 $q = Vh$  为单宽流量,其余符号意义和前面相同,下标 1 表示上层流体,下标 2 表示下层流体,有

图 7.9 内水跃

上标“ $2$ ”的表示水跃后的量,无上标的表示水跃前的量。

对下层流体在水平方向应用动量方程后,得

$$\rho_2 q_2^2 \left( \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) = h_2 h_1 \rho_1 g + \frac{1}{2} h_2^2 \rho_2 g + \frac{1}{2} (h_1 + h_2) (h_2 - h_1) \rho_1 g - h_2 h_1 \rho_1 g - \frac{1}{2} h_1^2 \rho_2 g \quad (7.49)$$

式中左边为动量通量的变化,右边为作用于上游断面、水跃面及下游断面的压力。令

$$a_2 = \frac{q_2^2}{g} \quad r = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

代入上式,成为

$$2a_2(h_2 - h_1) = h_2 h_1 (h_2 + h_1) [r(h_1 - h_2) + (h_2 - h_1)] \quad (7.50)$$

对上层流体应用动量方程,同法可推得

$$2a_1(h_1 - h_2) = h_1 h_2 (h_1 + h_2) [(h_1 - h_2) + (h_2 - h_1)] \quad (7.51)$$

式中  $a_1 = \frac{q_1^2}{g}$

在给定  $h_1$  和  $h_2$  后,可以联立解方程(7.50)和(7.51),求出共轭水深  $h_1$  和  $h_2$ 。因这些方程式都是三次方程式,一般应有 9 个解,

但其中一个即  $h_1 = h_1, h_2 = h_2$  无意义, 有物理意义的只能是实正数的解。当用图解法分析时, 即取  $\frac{h_2}{h_2}$  及  $\frac{h_1}{h_1}$  为坐标, 分别从方程(7.50)及(7.51)的解各作三条曲线, 两组曲线的交点代表共轭水深, 但 9 个交点中只有落在第一象限的才是物理上能够存在的共轭状态。据易家训等分析结果, 最多只能有 3 个共轭状态。如其中有一层流动的密度弗劳德数  $F_d$  特大而成为主导, 则只有一种共轭状态, 由下游条件决定唯一的解。

在特殊情况, 其中一层流体为静止, 则内水跃方程和自由水面的水跃方程相似, 只是将弗劳德数  $F_r$  改为密度弗劳德数  $F_d$ 。如上层流体静止,  $a_1 = 0$ , 由方程(7.51)得出

$$\frac{h_2}{h_2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8F_{d2}^2} - 1 \quad (7.52)$$

成为正水跃(图 7.9a)。如下层流体静止则得

$$\frac{h_1}{h_1} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8F_{d1}^2} - 1 \quad (7.53)$$

成为逆水跃(图 7.9b)。易家训等曾做实验对正水跃及逆水跃进行验证。实验结果虽然和上两式比较接近, 但似乎也看出共轭水深不仅与密度弗劳德数有关, 而且还和上下层流体的密度比有一定关系。当密度弗劳德数  $F_d$  及密度比  $r$  增大时, 摩阻力(特别是内界面上的阻力)变得更为重要<sup>[36]</sup>。

## 7.4 内波及内界面的稳定

### 一、内波种类

稳定的分层流体中, 流体的微团受到扰动而又具有恢复到原来平衡位置的倾向所产生的内部波动, 称为内波(internal waves)。内波按其形式可分为辐状波、背风波、界面波和孤立波等

几种。

辐状内波是指从扰动源以辐射状沿与铅垂轴成一定角度的方向传播的内波。

这里引入一个和内波有关的重要参数,称为布伦特-韦伊塞莱频率(Brunt-Vaisala frequency),以  $N$  表示。设流体微团在铅垂方向上移一个距离  $z$ ,其密度保持为  $\rho_0$ ,周围流体的密度为  $\rho_0 + \frac{d\rho_0}{dz}$

$z$ ,则所受的浮力为  $-\rho_0 g \frac{d\rho_0}{dz} z$ 。忽略粘性作用,控制运动的方程为

$$\rho_0 \frac{d^2 z}{dt^2} = -\rho_0 g \frac{d\rho_0}{dz} z \quad (7.54)$$

或 
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -N^2 z$$

式中 
$$N = \sqrt{-g \frac{d\rho_0}{dz}} \quad (7.55)$$

$\frac{d\rho_0}{dz}$ 是负值。在恢复力作用下,流体微团将绕它的原来位置以角频率  $N$  作振荡。如果波动的方向(波前的法线方向)与铅垂方向成角,波动的角频率为  $\omega$ ,则<sup>[4]</sup>

$$\omega = N \sin \theta \quad (7.56)$$

故可能存在角频率在  $0 \sim N$  之间的内波,亦即  $N$  是内波可能的最高频率,当扰动的频率  $\omega > N$  时,这种扰动就不可能在流体内传播。在海洋底部  $N^2 \approx 1$ ,在温跃层中  $N^2 \approx 1$ ,故对某一给定的扰动频率  $\omega$ ,只能在某个深度范围内有波。在不分层的流体中  $N = 0$ ,不会产生内波。

背风波是指分层流体越过障碍物时,在下游产生的内波。山的背风面常存在忽上忽下的气流称为大气背风波,是气象方面一个重要的现象。

孤立内波是指在分层流的内界面上一个有一定波高的单波,

它是一种在内界面上推进的移动波。孤立波的波长理论上无限长, 因为它的波轮廓线是以未干扰的内界面为渐近线。孤立波的理论研究工作很多。

界面内波是两种不同密度的流体的内界面上在重力作用下发生的波, 是一种摆动波。下面对它的性质和分析作些介绍。

## 二、界面内波的运动

现讨论二层异重流内界面上的波动。这个问题的研究工作很多, 著名的有凯尔文-海姆霍兹(Kelvin-Helmholtz)理论, 这理论是在理想流体的前提下, 令上下层流动分别为等速流而二者的速度不同, 在分界面上设可存在滑动速度来处理。日本浜田德一和加藤始(1962)不用这个等速假定, 而在设流速为直线分布的条件下提出一个理论分析, 对于界面上有速度的滑动或速度为连续分布都适用<sup>[9]</sup>。下面介绍浜田-加藤理论。

如图 7.10 所示, 坐标原点取在无波时的界面上, 沿流向为  $x$

图 7.10 二层异重波的界面内波

轴,  $y$  轴向上,  $\eta$  为波面坐标,  $c$  为波速, 其他符号意义与前同。忽略

粘滞性, 考虑理想流体的二维流动。将波动时的流速分解为平均速度和扰动速度, 平均速度用大写字母表示, 在本情况为  $U_1(y)$ ,  $U_2(y)$ ,  $V_1 = V_2 = 0$ ; 扰动速度用小写字母  $u_j, v_j$  表示 ( $j = 1, 2$ )。当忽略高阶项后, 描述运动的欧拉方程成为

$$\frac{u_j}{t} + U_j \frac{u_j}{x} + v_j \frac{U_j}{y} + \frac{1}{j} \frac{p_j}{x} = 0 \quad (7.57)$$

$$\frac{v_j}{t} + U_j \frac{v_j}{x} + g + \frac{1}{j} \frac{p_j}{y} = 0$$

连续方程为 
$$\frac{u_j}{x} + \frac{v_j}{y} = 0 \quad (7.58)$$

(下标  $j = 1$  为上层,  $j = 2$  为下层, 不相加)

边界条件为:  $y = h_1, v_1 = 0; y = -h_2, v_2 = 0$   
在内界面  $y = 0, p_1 = p_2$  (7.59)

由界面上质点运动的条件有

$$v_j = \frac{D}{Dt} = \frac{u_j}{t} + U_j \frac{v_j}{x} \quad (j = 1, 2) \quad (7.60)$$

从(7.57)两式中消去压强  $p$ , 并考虑到式(7.58)后得到(以下略去下标  $j$ )

$$\frac{u}{t} + U \frac{u}{x} + v \frac{d^2 U}{dy^2} = 0 \quad = \frac{u}{y} - \frac{v}{x} \quad (7.61)$$

将界面上发生的内波波形用复数表示为

$$= a e^{ik(x - ct)} \quad (7.62)$$

将二维流动的流函数  $(x, y, t)$  用分离变量的形式表示为

$$= \psi(y) e^{ik(x - ct)} \quad (7.63)$$

通过计算  $u = -\frac{v}{y}, v = \frac{u}{x}$  及  $\psi$ , 式(7.61)成为

$$(U - c) \frac{d^2 \psi}{dy^2} - k^2 \psi - \frac{d^2 U}{dy^2} \psi = 0 \quad (7.64)$$



此式中有  $\frac{d^2 U}{dy^2}$  项, 在普遍情况下难以求解。但如假设流速为直线分布

$$U_1 = U_{10} + \alpha_1 y \quad U_2 = U_{20} + \alpha_2 y \quad (7.65)$$

式中  $U_{10}$ 、 $U_{20}$  是界面上两层的流速, 则可求出  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  如下: 这时在  $\frac{d^2 U}{dy^2} - k^2 U = 0$  的解  $U = Ae^{ky} + Be^{-ky}$  中, 应用水面和水底的边界条件式 (7.59) 可求出

$$\alpha_1 = C_1 \operatorname{sh}k(y - h_1), \quad \alpha_2 = C_2 \operatorname{sh}k(y + h_2)$$

再由内界面的条件式 (7.60) 确定常数  $C_1$  和  $C_2$ , 得出的结果如下:

$$\begin{aligned} \text{在上层} \quad \alpha_1 &= a(c - U_{10}) \frac{\operatorname{sh}k(y - h_1)}{\operatorname{sh}kh_1} e^{ik(x - ct)} \\ \text{在下层} \quad \alpha_2 &= a(U_{20} - c) \frac{\operatorname{sh}k(y + h_2)}{\operatorname{sh}kh_2} e^{ik(x - ct)} \end{aligned} \quad (7.66)$$

求压强  $p$  可由 (7.57) 求出  $u$ 、 $v$ , 然后代入方程 (7.57) 中, 对上层和下层分别得到

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho} &= -gy + \frac{a(c - U_{10})}{\operatorname{sh}kh_1} \\ &\times [k(U_{10} - \alpha_1 y - c) \operatorname{ch}k(y - h_1) - \alpha_1 \operatorname{sh}k(y - h_1)] e^{ik(x - ct)} \\ \frac{p_2}{\rho} &= -gy + \frac{a(U_{20} - c)}{\operatorname{sh}kh_2} \\ &\times [k(U_{20} - \alpha_2 y - c) \operatorname{ch}k(y + h_2) - \alpha_2 \operatorname{sh}k(y + h_2)] e^{ik(x - ct)} \end{aligned} \quad (7.67)$$

在内波的波面  $U = ae^{ik(x - ct)}$  上, 压强是连续的, 将上式括号 { } 中的  $y = 0$  近似用  $y = 0$  代替, 由于  $p_1 = p_2$ , 可得

$$\begin{aligned} \frac{c^2 - U_{10}^2}{2} g + \frac{1}{2}(c - U_{10}) \{k(U_{10} - c) \operatorname{cth}kh_1 + \alpha_1\} \\ = (U_{20} - c) \{k(U_{20} - c) \operatorname{cth}kh_2 - \alpha_2\} \end{aligned} \quad (7.68)$$

上式是内波波速  $c$  的二次方程, 它的解为

$$c = \frac{\frac{1}{2}U_{10}c\text{th}kh_1 + U_{20}c\text{th}kh_2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2k} - \frac{2}{2k} \pm \sqrt{\frac{1}{2}c\text{th}kh_1 + c\text{th}kh_2}}{\quad} \quad (7.69)$$

式中

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \frac{1}{2k} - \frac{2}{k} \\ &+ (U_{20} - U_{10}) \frac{1}{2} \frac{1}{k} c\text{th}kh_2 + \frac{2}{k} c\text{th}kh_1 \\ &- (U_{10} - U_{20})^2 \frac{1}{2} c\text{th}kh_1 \mp c\text{th}kh_2 \\ &+ \frac{1}{2} c\text{th}kh_1 + c\text{th}kh_2 \frac{g}{k} \end{aligned} \quad (7.70)$$

$k = \frac{2}{\lambda}$ , 为波长。

对于淡盐水的内界面波, 可近似取  $\frac{1}{2} = 1$ , 用上式进行研究。

下面对两种不同流速分布情况应用式(7.69)。

(1) 凯尔文-海姆霍兹内波 简称 K-H 波。二层中等速流的流速各为  $U_1$  及  $U_2$ , 二层的界面上有滑动。在式(7.69)中用  $U_{10} = U_1$ ,  $U_{20} = U_2$  代入, 就得到 K-H 波, 其波速为

$$\begin{aligned} c = & \frac{U_1 c\text{th}kh_1 + U_2 c\text{th}kh_2}{c\text{th}kh_1 + c\text{th}kh_2} \\ & \pm \frac{1}{k} \frac{g}{c\text{th}kh_1 + c\text{th}kh_2} \\ & - \frac{1}{2} \frac{(U_1 - U_2)^2 c\text{th}kh_1 \mp c\text{th}kh_2}{(c\text{th}kh_1 + c\text{th}kh_2)^2} \end{aligned} \quad (7.71)$$

对于长波,  $kh$  很大,  $k$  很小,  $kh \rightarrow 0$ ,  $c\text{th}kh \rightarrow 1/kh$ , 则波速成为

$$c_{\pm} = \frac{U_1 h_2 + U_2 h_1}{h_1 + h_2} \pm \frac{g h_1 h_2}{h_1 + h_2} - \frac{(U_1 - U_2)^2 h_1 h_2}{(h_1 + h_2)^2} \quad (7.72)$$

在只有上层流动时,  $U_2 = 0$ 。如下层比上层深很多, 可设  $\frac{h_1}{h_2} \rightarrow 0$ , 则有

$$c = U_1 - \sqrt{gh_1} \quad (7.73)$$

盐水楔的河口临界水深条件  $h_{1c} = \frac{q_1^2}{g}$ , 就相应于  $c = 0$  的情况。

对于内波为深水波时,  $kh \gg 1$ ,  $\text{cth}kh \approx 1$ , 因  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , 代入式(7.69)后, 得

$$\frac{c}{U_1} = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{g}{U_1^2} - 1} \right] \quad (7.74)$$

当  $\frac{g}{U_1^2} < 1$  时出现虚数, 故波长  $\lambda < \frac{U_1^2}{g}$  的波会不稳定发生破碎而不存在, 这种临界波的波速是  $c = \frac{1}{2}U_1$ 。

(2) 具有连续流速分布的界面内波 因界面上流速连续,  $U_{10} = U_{20} = U_i$ , 则式(7.69)中根号内的值不论  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  如何, 总是正数, 故不论两层流动的速度大小如何, 任何波长的内波都是稳定的。而在 K-H 波, 则当  $\alpha$  为负值时, 波速成为复数  $c = c_r + ic_i$ ,  $= ae^{\pm c_i t} \cdot e^{ik(x - c_r t)}$  随时间增加而增大, 波会成为不稳定。

将式(7.69)应用于盐水楔发生的内波,  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别由上层淡水的平均流速  $U_{1m} = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} (U_i + \alpha_1 y) dy$  及下层盐水的平均流速

$U_{2m} = \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2} (U_i + \alpha_2 y) dy$  来决定, 得到

$$\alpha_1 = \frac{2(U_{1m} - U_i)}{h_1} \quad \alpha_2 = \frac{2U_i}{h_2}$$

再设内波是深水波,  $kh_i \gg 1$  ( $i = 1, 2$ ), 可得下列简单公式

$$\frac{c_{\pm}}{U_i} = 1 \pm \sqrt{\frac{g}{4U_i^2} - 1} = 1 \pm \frac{g}{4fU_{1m}} i^{\alpha} \frac{U_{1m}}{U_i} i^{\alpha} \frac{c}{U_i} \quad (7.75)$$

式中  $f$  为内波的频率。此式得到实验资料较好的验证。

对于界面内波还有一个值得注意的问题。如果两层流体处于相对静止状态,而密度差很小,深度很大时,可以证明内波的波速  $c_i$  比自由水面的波速  $c_0$  小得多,而内波的振幅  $\eta_i$  比水面波的振幅  $\eta_0$  大得多<sup>[36]</sup>。如深海的盐水上有一层淡水,  $\eta_i$  比  $\eta_0$  可大几百倍,这会使船舶航行受到很大的阻力。这个现象在 1893 年为挪威探险家 F·南森在北冰洋航行中首次发现,当船舶通过盐水上覆盖一层淡水的区域时,船速显著下降。海中的内波对于潜艇也会造成很大的威胁,因而得到广泛的重视。

### 三、内界面的稳定

上面讨论二层异重流的运动时,都是针对上下层流体互不相混的情况。但当两层流体之间的相对速度达到一定大小时,内界面就不能保持稳定,而会发生混合。

内界面的稳定性问题,以前较多的是从小扰动的增大或衰减的角度来研究。忽略粘性将两层流体都作为理想流体,研究其内界面上的波动,以在什么条件下会出现虚数解来判别波会失稳破碎,上面已简略提及。大体上认为波长愈短,弗劳德数愈大时,愈不稳定。考虑流体的粘性时,则认为应和雷诺数有关。科立根 (Keulegan, G. H. 1949) 从理论上提出一个判别这种二层异重流内界面稳定的无量纲参数  $K$ , 其定义为

$$K = \frac{(g)^{1/3}}{U} \quad (7.76)$$

或 
$$K^3 = \frac{1}{(F_d)^2 Re} \quad (7.77)$$

式中  $F_d = \frac{U}{gL}$ ,  $Re = \frac{UL}{\nu}$ ,  $U$  为两层的相对流速,  $L$  为特性长度,可取水深。

科立根通过对上层流引起下层流体( $U_2 = 0$ )混合的实验( $U =$

$U_1, L = h_1$ ), 求得  $c_c$  的临界值为

$$\begin{aligned} \text{Re} < 450 & \quad c_c = 0.127 \\ \text{Re} > 450 & \quad c_c = 0.178 \end{aligned} \quad (7.78)$$

哈勒曼综合美国麻省理工学院和标准局的实验给出<sup>[37]</sup>:

$$\begin{aligned} \text{下层为层流时} & \quad \frac{c_c^3}{\text{Re}} = \frac{1}{\text{Re}} \\ \text{下层为紊流时} & \quad \frac{c_c^3}{\text{Re}} = 0.18 \end{aligned} \quad (7.79)$$

上式的特征值均对下层流动,  $L = h_2, U = U_2, \rho = \rho_2$ 。实际异重流的价值大于临界值  $c_c$  时, 内界面是稳定的。如流速增加,  $c_c$  值变为小于  $c_c$  时, 内界面不稳定而引起两层流体的混合。混合的机理和过程是一个复杂而有待深入研究的问题。

对于盐水楔, 当发生混合时, 下层盐水掺入上层淡水的速度  $v_j$  可由下式确定

$$v_j = K(U_1 - 1.15U_{1c}) \quad (7.80)$$

式中  $U_{1c}$  为由式(7.78)确定的上层临界流速,  $U_1$  为实际流速。科立根给出  $K = 3.5 \times 10^{-4}$ 。

二层密度不同的流体发生混合以后, 逐渐转变为有连续密度梯度的分层流体, 其运动的分析原理有些和前几章中扩散、离散和浮射流等相同。详细可参考有关文献[9、35、37、38]。

## 7.5 分层水域的泄流——选择取水问题

### 一、堵塞现象

密度在垂向变化的分层流体, 当做缓慢的流动时, 略去动量方程的惯性项可以分析得出如下的结论: 分层流体总是在水平面内绕过流体中的有限尺度物体, 尽量不作铅垂方向的运动。因此, 对于二维情况, 在流体内运动的物体将使其前后的流体象刚体一样平移, 产生前后尾流。这种现象称为堵塞现象(blocking)<sup>[35]</sup>, 它很

容易由实验证实。

无分层的流体通过泄流孔口泄放时,孔口上游的流体呈辐射状从各个方向汇集孔口,在孔口上游上下各层流体都是流动的(图 7.11a)。在有铅垂向分层的流体泄流时,由于上述的堵塞作用,就有一部分离孔口垂向距离较大的流体层不会被泄出(图 7.11b)。正是由于分层流泄放存在这个特点,就有可能加以利用,提出选择取水的课题,即如何在有密度分层的水体中,有目的地选择引用其中某层水,以满足特定的工农业生产的需要。例如,热、核电站的冷却水希望从水库中取下层的冷水;农业灌溉则希望取上层的温水。水库利用异重流排沙则要研究下层浑水的泄流规律等等。分析计

图 7.11 无分层流体与有分层流体孔口泄流的差异

算中常要解决的一个问题是,在给定的取水口位置之下,要限制泄放多大流量,才不会把不希望引取的另一层水也带出来。下面介绍一些已有的研究成果。

## 二、在二层水域中取下层水

图 7.12 示在二层水域中从泄水闸底取下层水的情况。设二层密度不同的水有明显的内界面,现研究不允许上层水泄出时,能引用下层水的最大流量  $Q_{max}$ ,这时闸门开度和内界面的位置如图 7.12 所示。

图 7.12 二层水域中取下层水

按定常渐变流对下层水列出上游断面 1-1 和闸前断面 2-2 的能量方程:

$$\frac{h_1(h_2 - h_r)}{2} + h_r = \frac{h_1(h_2 - z)}{2} + z + \frac{V^2}{2g} \quad (7.81)$$

式中左边和右边第一项为内界面上的压强水头, 第二项为位置水头,  $V$  为断面 2-2 处的流速, 断面 1-1 处的流速很小, 予以忽略, 同时对内界面曲率引起的压强水头变化以及两断面间的水头损失也忽略不计。故得

$$h_r = z + \frac{V^2}{2g} = z + \frac{V^2}{2g} \quad (7.82)$$

以  $Q$  表示引水流量,  $b$  表示闸孔宽度, 则

$$Q = Vbz \quad V = \frac{Q}{bz} \quad (7.83)$$

代入式(7.82) 得  $Q^2 = 2gb^2z^2(h_r - z)$  (7.84)

当给定  $h_r$ , 对式(7.84) 求导, 取  $\frac{dQ}{dz} = 0$ , 求得相应于最大流量  $Q_{max}$  的临界闸前水深  $z_c$  为

$$z_c = \frac{2}{3}h_r \quad (7.85)$$

相应的最大流量为

$$Q_{\max} = b \sqrt{g \frac{2}{3} h_r^3} \quad (7.86)$$

可以看出,当  $\theta = 0$  时,上式即相应于有自由水面的明槽水流的最大流量公式。

实际上因泄水时闸前内界面的曲率较大,为考虑这种影响,也可将能量方程的下游断面取在闸门出口处,即断面 3-3,而以  $h_p$  表示界面曲率引起压强水头的减小,同时将断面上流速分布不均匀的影响也考虑进去,则对断面 1-1 和 3-3 列能量方程可得<sup>[38]</sup>

$$\frac{h_r}{a} = 1 - \frac{h_p}{a} + \frac{V_0^2}{2g a} \quad (7.87)$$

式中  $a$  为闸孔开度,  $V_0$  为出口断面平均流速。引入出口断面的密度弗劳德数

$$F_{d0} = \frac{V_0}{ga} \quad (7.88)$$

代入式(7.87),得

$$\frac{h_r}{a} = 1 - \frac{h_p}{a} + \frac{F_{d0}^2}{2} \quad (7.89)$$

哈勒曼等认为  $h_p$  可表示为下列函数关系:

$$h_p = \frac{V_0^2}{2g} \{f_1(R) + f_2(\theta)\} \quad (7.90)$$

式中  $R$  为出口处内界面的曲率半径,  $\theta$  为内界面切线的水平倾角。将式(7.90)代入式(7.89)得到

$$\frac{h_r}{a} = 1 - \frac{F_{d0}^2}{2} \{f_1(R) + f_2(\theta)\} + \frac{F_{d0}^2}{2} = \eta + \frac{F_{d0}^2}{2} \quad (7.91)$$

式中  $\eta = 1 - \frac{F_{d0}^2}{2} \{f_1(R) + f_2(\theta)\}$ 。

哈勒曼等曾做实验求得  $\frac{h_r}{a} \sim F_{d0}$  的关系如图 7.13 中的曲线组所



示。

图 7.13  $\frac{h_r}{a} \sim F_{d0}$ 关系曲线<sup>[38]</sup>

### 三、在二层水域中取上层水

讨论二维情况, 设下层水是静止的, 只有上层水在流动。忽略阻力损失, 按伯努利定理可对上、下层分别列出下列关系式:

$$\text{上层} \quad \frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 + p_1 + \rho_1 g z = \text{const} \quad (7.92)$$

$$\text{下层} \quad p_2 + \rho_2 g z = p_2 + (\rho_1 + \rho_2) g z = \text{const} \quad (7.93)$$

由内界面上压强是连续的条件, 在内界面上有  $p_1 = p_2$ , 则从上两式得

$$\frac{1}{2} \rho_1 V_1^2 - \rho_1 g z = \text{const} \quad (7.94)$$

令  $g^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} g = g$ , 得内界面上的伯努利关系式

$$V^2 - 2g^* z = \text{const} \quad (7.95)$$

由式(7.95)可见,当流速减小时,  $z$  减小, 界面流线下降; 流速增大时,  $z$  也增大, 界面流线上升。当流量和流速较小, 流线下降会在壁面出现驻点  $S$  如图 7.14(a); 当流量和流速增大至一定程度, 界面流线会突然上升, 形状转变为 7.14(b), 趋于在  $B$  点与壁面相切。如假定以这一状态作为选择取水的临界状态, 即下层水不会被带出的极限状态, 就可以用分析方法确定这个选择取水的条件。

图 7.14 取上层水的界面流线

克拉亚(Craya, A.)用复变函数论的方法<sup>[39]</sup>, 求得在上面边界倾角为  $30^\circ$  时(图 7.15), 相应于上述临界状态的密度弗劳德数为

$$F_{d_c} = \frac{q}{-gh^3}^{1/2} = \frac{V}{gh} = 1.01 \quad (7.96)$$

式中  $q$  为单宽流量,  $q = Vh$ 。

对于铅直壁面( $\theta = 90^\circ$ )  $F_{d_c} = \frac{3}{2} \times 1.01 = 1.52$

对于水平上边界( $\theta = 0^\circ$ )  $F_{d_c} = \frac{3}{4} \times 1.01 = 0.75$

这样如二维泄水口的开度为  $D$ (图 7.16), 上面水深  $H > D$ , 因  $q = V_c D$ , 可用下列公式计算引取上层水时相应于最大流量的临界流速  $V_c$ :

$$\frac{V_c}{gh} = K \frac{h}{D} \quad (7.97)$$

当上边壁面为铅直时

$$K = 1.52$$

当上边壁面倾角为  $30^\circ$  时

$$K = 1.01$$

当上边壁面为水平时

$$K = 0.75$$

图 7.15 上边界有  $30^\circ$  倾角的上层取水

图 7.16 二维泄水口的上层取水

#### 四、其他选择取水方式

对于选择取水,国外有不少研究。现选取几种情况列出其计算临界流速的关系式如图 7.17<sup>[37]</sup>。

图 7.17 各种形式选择取水的临界流速

## 第八章 地下水中的弥散

地下水是在沙土的孔隙中存在和运动的, 污染物质在其中的扩散迁移属于孔隙介质中的离散性质。由于地下水受到污染后就难以消除, 而城市工业废水大量排放, 农药化肥的广泛应用, 使许多地区的地下水受到不同程度的污染, 因此日益为人们重视。对地下水中离散(现国内多采用名称“弥散”)课题已有专门论著, 这里只简要地作一介绍。

### 8.1 孔隙介质中弥散的特点

大量实验观测都能说明, 标志物质在孔隙介质中也和在均匀流体中一样, 发生扩散迁移的现象, 这种现象称为水动力弥散(hydrodynamic dispersion)。水动力弥散也可分为由于流体的分子运动引起的分子扩散及由于孔隙中流体速度分布不均匀引起的机械弥散(mechanical dispersion)两部分。但由于水动力弥散是在窄小的、蜿蜒曲折的缝隙内进行的, 它就不同于均匀连续的流体中的离散而有许多特点。

首先由于孔隙通道的窄小, 流体的紊动受到制约, 其流动多为层流。即使在大孔隙的介质中会出现紊流, 紊动的尺度也不会大。因此分子力对弥散的作用不能忽视。这和一般连续流体中和紊动扩散相比分子扩散常可忽略的情况大不相同。同时, 除了分子扩散外, 固体颗粒表面对溶质的吸附、析出等分子力作用, 有时也要

考虑。

其次, 由于孔隙通道蜿蜒曲折, 如图 8.1 所示, 原来在一条直线上的标志质点进入其他通道后, 因通道性质的不同, 经过相同的时间  $t$  后, 它们的位置就差别很大。图中(a)为一般流体中的离散, (b)、(c)则为孔隙介质中的弥散。可以看到后者不仅位置不同,

图 8.1 孔隙介质中的弥散

其方向性的变化也大。这说明了机械弥散的现象。如果, 仍用费克的分子扩散模式, 即扩散通量

$$I_x = - D_d \frac{c}{x} \quad (8.1)$$

机械弥散通量也用梯度模式

$$I_x = - D \frac{c}{x} \quad (8.2)$$

可以想见, 不但机械弥散系数  $D$  会随方向变化, 在孔隙介质非各向同性时,  $D_d$  也随方向变化。为表示和一般流体的分子扩散系数  $D_m$  的区别,  $D_d$  称为有效分子扩散系数。

因为有这些特点, 影响弥散的参量除了流体及其运动的性质方面外, 还有孔隙的性质方面。前者包括流体的密度、污染物的浓度及流动速度, 后者包括孔隙率、渗透系数、孔径分布和固结程度等。

## 8.2 弥散模型与弥散方程

正如分析孔隙介质的渗流运动需要先建立达塞渗流模型一样,对于孔隙介质的弥散分析,由于实际流动的极不规则和影响弥散的参量至为复杂繁多,也必须先建立分析的理论模型。这种模型应能反映弥散的实际情况,而又便于进行分析计算。目前文献上介绍的模型主要有以下几种<sup>[46]</sup>:

(1) 泰勒(Taylor, G. I.)毛管模型 将孔隙中流动看作圆管层流,引用圆管层流中离散的方法分析,其后阿里斯(Aris, R.)将孔隙看作不规则形状的毛管,用浓度矩法进行分析。这是弥散模型的第一阶段。

(2) 沙夫曼(Saffman)随机毛管模型 毛管的方位和分布都是随机的,联结成一个平直孔隙的网络。这种模型定性地反映了孔隙的复杂性,首次提出弥散存在几个不同性质的区域,以及纵向离散和横向离散有重要差别等,但主要是理论性的,定量难以准确。

(3) 伯尔(Bear, J.)和巴切马特(Bachemat, Y.)随机毛管模型 这种模型也将孔隙设想为由许多相互连接的、随机分布的毛管和接头组成的空间网络,管子的长度、断面和方位都是变化的。在管子断面上对流动进行局部性平均后,提出一个孔隙介质表征体积单元 REV (representative element of volume)的概念,将局部平均流动再在 REV 内进行宏观的平均,由此建立出一整套的宏观方程,是毛管类模型中一个重要的模型<sup>[47]</sup>。

(4) 舍德格尔(Scheidegger, A. E.)统计随机模型 这种模型基于孔隙介质的内部构造极为复杂,又包含有随机的分子扩散,则给予确定性的数学描述是做不到和不必要的,所以假定溶质在孔隙介质中的运动是一种随机现象,故应用统计方法来建立模

型。要注意只是把现象理解为随机，孔隙介质的结构和流体的性质是确定的。任何统计的孔隙介质只是一个近似的模型。

舍德格尔引用随机游动的理论，在一些假设条件下求得溶质浓度分布为高斯正态分布，推导出一维弥散方程，并推广到三维弥散，这些宏观方程的形式和前面讨论的连续流体中的离散方程的形式完全相同。

各种弥散理论模型都有其相应的弥散方程的形式，可参考有关文献专著。这里只列举目前应用较广泛的弥散宏观方程如下。

弥散宏观方程 和达塞渗流模型类似，对孔隙介质建立假想的连续介质模型，所有的参量都是指对孔隙介质表征体积单元的统计平均值，类似于推导连续流体中移流扩散方程的方法，可求得一般形式的水动力弥散方程：

$$\frac{c}{t} + u_i \frac{c}{x_i} = \frac{1}{x_i} D_{ij} \frac{c}{x_i} + F_c \quad (8.3)$$

式中  $D_{ij}$  为水动力弥散系数，是一个张量，常写为  $D_h$ ：

$$D_h = D + D_d \quad (8.4)$$

$D$  为机械弥散系数， $D_d$  为有效分子扩散系数，理论上它们也都是张量。

对于流场坐标与张量主轴一致时， $D_{ij}$  中只有  $D_{xx}$ 、 $D_{yy}$ 、 $D_{zz}$  三项不等于零，式(8.3)成为

$$\frac{c}{t} + u_i \frac{c}{x_i} = \frac{1}{x_i} D_{ii} \frac{c}{x_i} + F_c \quad (8.5)$$

写成直角坐标形式为

$$\begin{aligned} & \frac{c}{t} + u \frac{c}{x} + v \frac{c}{y} + w \frac{c}{z} \\ & = \frac{1}{x} D_{xx} \frac{c}{x} + \frac{1}{y} D_{yy} \frac{c}{y} + \frac{1}{z} D_{zz} \frac{c}{z} + F_c \quad (8.6) \end{aligned}$$

源、汇项  $F_c$  要根据具体情况考虑。

当考虑吸附和解吸作用时，设  $F$  表示单位体积固体介质所吸



附的污染物质量, 则  $-\frac{F}{t} \cdot \frac{(1-n)}{n}$  表示单位时间内单位流体体积中由于固体吸附或解吸所引起的含污染物的改变量, 如果吸附有  $F = kc$  的线性关系, 则得  $F_c = -k \frac{1-n}{n} \frac{c}{t}$ ,  $n$  为孔隙率,  $k$  为吸附系数。以  $F_c$  代入式(8.3)得:

$$1 + k \frac{1-n}{n} \frac{c}{t} = \frac{D_{ij}}{x_i} \frac{c}{x_j} - u_i \frac{c}{x_i}$$

或 
$$\frac{c}{t} = \frac{D_{ij}}{x_i} \frac{c}{x_j} - \frac{u_i}{R_d} \frac{c}{x_i} \quad (8.7)$$

式中 
$$R_d = 1 + k \frac{(1-n)}{n} \quad (8.8)$$

称为阻滞因子, 它起了一个减小渗流速度和弥散系数的作用, 使污染物的输移过程被阻滞。

影响  $F_c$  的其它因素很多, 这里不再讨论。

对于渗流为沿  $x$  方向的均匀流, 流速为  $V$ , 设孔隙介质各向同性, 这种一维渗流的弥散方程成为

$$\frac{c}{t} + U \frac{c}{x} = D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (8.9)$$

式中  $D_L$  为纵向弥散系数,  $D_T$  为横向弥散系数。

弥散方程在简单的情况下有些解析解。目前多数问题常采用数值法求解。有限差分、特征差分和有限元法等都得到应用。解算时自然要同时应用渗流的连续方程和运动方程, 如果设污染物为示踪物质, 则可先求出流场再由弥散方程求浓度场, 否则就要三个方程联立求解。

### 8.3 水动力弥散系数

从上面分析可见水动力弥散系数的确定在弥散分析计算中很重要。下面从量纲分析入手讨论弥散系数的一些实验成果。

## 一、量纲分析

从物理推断, 弥散过程主要和下列过程有关: 流体(溶质和溶剂)的粘度  $\mu$  和密度  $\rho_i$  ( $i=1$  或  $2$ ), 重力加速度  $g$ , 平均孔隙流速  $V$ , 弥散系数  $D_h$ , 和孔隙介质特性如渗透系数  $k$  等。假设在混合过程中流体体积没有缩小, 可用  $g(\rho_1 - \rho_2) = g \Delta \rho$  表示密度差影响, 分子扩散可用系数  $D_d$  表示,  $D_d$  及  $\mu$ 、 $\mu_c$  都与浓度变化无关。弥散过程就可以下列关系式表示

$$D_h = f(g, \mu, \mu_c, V, D_d, k) \quad (8.10)$$

由  $\pi$  定理知, 上式可改写为 4 个无量纲数的关系式。从弥散方程和一些实验成果分析, 能最好描述弥散现象的无量纲数为

$$D_h/D_d, V k^{1/2}/D_d, \mu/\mu_c, (g \Delta \rho k^{3/2})/(\mu D_d)$$

其中  $D_h/D_d$  为无量纲弥散系数;  $\frac{V k^{1/2}}{D_d} = Pe$ , 称为佩克立数(Peclet number), 反映流速的影响;  $\mu/\mu_c$  是粘性对比的量值估计;  $(g \Delta \rho k^{3/2})/(\mu D_d)$  为密度对比的量值估计, 与描述热自由对流的瑞利数(Rayleigh number)的形式相同。

有效分子扩散系数  $D_d$  是考虑了孔隙骨架结构的影响, 它和流体的扩散系数  $D_m$  的比值可写为

$$\frac{D_d}{D_m} = \frac{1}{F \alpha n} \quad (8.11)$$

式中  $n$  为孔隙率,  $F$  称为构造因子。对于孔隙介质的结构也可不用  $k$  表示, 而用介质的某一特征长度, 如粒径  $d$  表示, 则 4 个无量纲数可写为

$$D_h/D_m, V d/D_m, \mu/\mu_c, (g \Delta \rho d^3)/(\mu D_m)$$

对于示踪输移情况, 即无密度变化和粘性变化的影响时, 就有

$$\frac{D_h}{D_m} = f \frac{V d}{D_m} = f(Pe) \quad (8.12)$$

由上式可看出  $Pe$  数表示随流扩散与分子扩散对比的量值估计。

## 二、在示踪输移情况下弥散系数的实验成果

### 1. 纵向弥散系数

多数实验是在松散介质中进行的。这种实验成果可以对弥散现象作比较完整的物理分析。将成果表示为两种类型的曲线:图 8.2 为  $D_L/D_m$  与  $Pe$  数的关系曲线;图 8.3 为  $D_L/Vd$  与  $Pe$  数的关系曲线。从图可以看出纵向弥散系数与分子扩散系数、平均流速  $V$  之间的关系,这种关系可以分为 5 个区。

a 区:纯分子扩散区,平均流速很小,  $D_L/D_m$  为常数。对于均匀球状颗粒构成的介质,实验得出  $(D_L/D_m)_0 = 0.67$ 。

b 区:机械弥散作用与分子扩散作用相当。此时  $Pe$  数的范围在  $0.4 \sim 5$  之间。

c 区:机械弥散作用超过分子扩散作用。此时的输移主要是纵向机械弥散和横向分子扩散相结合,分子扩散常造成纵向弥散的减弱。由实验可得

$$\frac{D_L}{D_m} = \frac{D_L}{D_m}_0 + Pe^m \quad (8.13)$$

$0.5, m \quad 1.2$

d 区:机械弥散起主导作用,分子扩散可忽略。本区存在下列关系

$$\frac{D_L}{D_m} = Pe, \quad = 1.8 \pm 0.4 \quad (8.14)$$

e 区:属于达塞定律范围以外的机械弥散。此区的实验研究很少,多数实际问题在 c、d 区。

对于固结物质,因其孔隙尺寸变化大,相应的流速差别大,实验也表明其中的弥散作用大于非固结介质,也有些  $D_L/D_m$  的经验关系式,这里不作介绍。

### 2. 横向弥散系数

图 8.2 纵向弥散系数与  $Pe$  数的关系<sup>[46]</sup>

图 8.3  $D_L/(Vd)$  与  $Pe$  数关系的分区<sup>[46]</sup>

关于横向弥散系数的实验比纵向弥散少,但也得到很好的成果。图 8.4 为在松散介质中的实验成果曲线,  $Pe$  数的范围为  $10^{-2} \sim 10^4$ 。由曲线可将弥散状态分为 4 个区。

a 区: 纯分子扩散区, 按均匀球状颗粒构成的介质实验, 得到

$(D_T/D_m)_0 = 0.7$ 。

b 区：机械弥散和分子扩散作用同时存在。

c 区：机械弥散作用大于分子扩散作用。得出下列关系式

$$\begin{aligned}\frac{D_T}{D_m} &= \frac{D_T}{D_m} + \frac{Vd}{D_m}^m & (8.15) \\ &= 0.025 \quad m = 1.1\end{aligned}$$

图 8.4 横向弥散系数与 Pe 数的关系<sup>[46]</sup>

d 区：纯机械弥散起作用，此时上式中的指数  $m = 1$ 。

将纵向弥散与横向弥散作比较时，可以看到其系数与 Pe 数关系的变化趋势是相同的。在定量上则横向弥散小于纵向弥散。

对于非示踪输移的一般情况下的弥散实验也有研究成果，可参考有关地下水弥散的专著。

## 8.4 渗流弥散方程的简单解析解

弥散的宏观方程只在简单的情况下有些解析解,复杂的实际问题多采用数值法计算。但对简单问题性质的估计,数值法的检验和确定弥散系数的试验设计等工作,解析解都是有用的。下面举几种简单情况的解析解作为示例。

### 一、无限域中保守性示踪剂源的弥散

前面已提到多孔介质中宏观的水动力弥散方程(8.3)其形式和连续流体中的移流扩散方程(4.19)相同,因此在4.9节中介绍的在均匀流场内移流扩散方程的各种解:包括瞬时源、连续源、点源、线源和面源的扩散公式都可移用来分析同样条件下多孔介质中示踪剂的弥散,不同之处只在于应采用水动力弥散系数  $D_h$  来代替流体中的扩散系数。所以在此就不再重复叙述。下面介绍一些情况稍有不同的例子。假设是理想示踪剂的输移,即流体运动不受浓度变化的影响,流体是不可压缩的,介质是均质和各向同性的。

### 二、无限长柱体中示踪剂的一维弥散

考虑一个沿  $x$  轴无限长的多孔介质柱体中,  $x = 0$  断面的两侧在开始时分别为两种有不同浓度示踪剂的流体所饱和,分析随后柱体内示踪剂的弥散。设沿  $x$  向流速  $v$  不变,即单位流量  $q$  不变  $\frac{dq}{dx} = 0$ ,但可随时间变化,即  $q = q(t)$ 。描述示踪剂浓度分布的偏微分方程为:

---

这些例子均引自文献[47]

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = D_h \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad - \infty < x < +\infty \quad (8.16)$$

式中  $V = q/n$ ,  $n$  为孔隙率。初始条件和边界条件是:

$$t = 0 \text{ 时, } -\infty < x < 0, \quad c = c_0$$

$$0 < x < +\infty, \quad c = c_1$$

$$t > 0 \text{ 时, } x = \pm \infty, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

$$x = -\infty, \quad c = c_0$$

$$x = +\infty, \quad c = c_1$$

伯尔(1960)应用拉普拉斯变换求得解为:

$$\frac{c(x, t) - c_0}{c_1 - c_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x - \int_0^t [q(t)/n] dt}{2 \sqrt{(D + D_d) t}} \right] \quad (8.17)$$

式中机械弥散系数  $D = a_L V = a_L \frac{q}{n}$ ,  $a_L$  为纵向弥散度。

当  $q = nV$  为常数, 并忽略分子扩散作用, 上式可简化为

$$\frac{c(x, t) - c_0}{c_1 - c_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x - Vt}{2 \sqrt{D t}} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x - Vt}{L} \right] \quad (8.18)$$

式中  $L^2 = 2D t$  为浓度分布的方差。图 8.5 表示  $c_0 > c_1$  时不同时刻沿柱长的浓度分布。可以看到相对浓度比  $[c(x, t) - c_0] / (c_1 - c_0)$  为 50% 的位置以平均流速  $V$  移动, 方差  $L^2$  与示踪剂质点运移的总途径  $L = Vt$  成正比。

对于有吸附作用的无限长柱体的情况, 如果吸附与浓度有线性关系, 由 8.2 节的式(8.7), 可写出浓度分布的偏微分方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{D_h}{R_d} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{V}{R_d} \frac{\partial c}{\partial x} \quad (8.19)$$

式中阻滞因子  $R_d = 1 + k \frac{(1-n)}{n}$ 。

比较式(8.19)和式(8.16)可以看出, 在后式中以  $V/R_d$  代替

图 8.5 无限长柱体中一维弥散的浓度分布

$V$ , 以  $D_b/R_d$  代替  $D_h$  即成为前式, 所以当初始条件和边界条件相同时, 由式(8.16)的解中以  $V/R_d$  代替  $V$ , 以  $D_h/R_d$  代替  $D_h$  即可得到式(8.19)的解。在定常流情况,  $q = nV = \text{const}$  时其解为

$$\frac{c(x,t) - c_0}{c_1 - c_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{R_d x - Vt}{2[R_d D_h t]} \right]^{1/2} \quad (8.20)$$

### 三、柱体中有放射性衰减的示踪剂的弥散

在多孔介质中被注入放射性的物质时, 分析其弥散需要考虑放射性的衰减, 设仍按示踪剂考虑, 由于这种衰减引起示踪剂浓度变化的规律为

$$\frac{dc}{dt} = -\lambda c \quad (8.21)$$

式中  $\lambda$  为示踪剂的衰减常数, 则弥散方程(8.3)变为

$$\frac{dc}{dt} + u_i \frac{dc}{dx_i} = \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{d^2 c}{dx_j^2} - \lambda c \quad (8.22)$$

对于一维纵向弥散, 可写为

$$\frac{dc}{dt} + V \frac{dc}{dx} = D_h \frac{d^2 c}{dx^2} - \lambda c \quad (8.23)$$

式中  $D_h$  在这里为纵向水动力弥散系数,  $V$  为纵向平均流速,  $V = q/n$ 。

#### 1. 无限长柱体中连续注入放射性示踪剂

在  $x = 0$  处恒定地注入示踪剂, 沿柱  $q = \text{const}$ , 当  $t = t$  时, 示



踪剂的浓度为  $c_0$ , 在  $dt$  时间内注入的示踪剂质量  $dM = c_0 V dt$ 。按瞬时面源的扩散公式加衰减项修正后得基本解为

$$dc(x, t, t_0) = \frac{dM}{4 D_h(t - t_0)} \times \exp - \frac{[x - V(t - t_0)]^2}{4D_h(t - t_0)} - (t - t_0) \quad (8.24)$$

恒定连续注入时, 通过积分求得

$$c(x, t) = \frac{c_0 V}{(4 D_h)^{1/2}} \exp \frac{Vx}{2D_h} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \exp - \frac{a}{4D_h(t - \tau)} - b \tau d\tau \quad (8.25)$$

式中  $a = x^2 / (4D_h)$ ,  $b = V^2 / (4D_h) + \lambda$ 。当  $t \rightarrow \infty$  时, 上式成为

$$c(x, \infty) = \frac{c_0}{1 + 4 D_h V^2} \exp \frac{Vx}{2D_h} \frac{1}{1 + 4 D_h V^2} \quad (8.26)$$

如  $x = 0$ , 由式(8.25)可得

$$c(0, t) = \frac{c_0}{1 + 4 D_h V^2} \operatorname{erf} \frac{V^2 t}{4D_h} + \lambda t \quad (8.27)$$

可见  $c(0, t) \rightarrow c_0$ 。当  $t \rightarrow \infty$  时, 由上式可得

$$c(0, \infty) = c_0 / (1 + 4 D_h V^2) \quad (8.28)$$

## 2. 半无限柱体中放射性示踪剂的弥散

在此情况,  $x \geq 0$  的半无限柱体在  $x = 0$  处与浓度恒为  $c_0$  的示踪剂溶液的源相连接, 柱体中流速  $V$  沿  $+x$  方向为常数, 示踪剂有放射性衰减。设在  $x = 0$  处的浓度在流动开始时立即达到  $c_0$  值, 这

相当于假定  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{c}{x} = 0$ 。

基本方程仍为(8.23), 初始条件和边界条件是:

$$\begin{array}{lll}
 t = 0 & x = 0 & c = 0 \\
 t > 0 & x = 0 & c = c_0 \\
 t > 0 & x = & c = 0
 \end{array} \quad (8.29)$$

对式(8.23)和(8.29)应用拉普拉斯变换,求得<sup>[48]</sup>:

$$\begin{aligned}
 c(x, t) = & \frac{c_0}{2} \exp \frac{Vx}{2D_h} \exp(-x) \operatorname{erfc} \frac{x - (V^2 + 4D_h)^{1/2}t}{2(D_h t)^{1/2}} \\
 & + \exp(x) \operatorname{erfc} \frac{x + (V^2 + 4D_h)^{1/2}t}{2(D_h t)^{1/2}}
 \end{aligned} \quad (8.30)$$

式中  $\lambda^2 = V^2 / (4D_h^2) + \lambda / D_h$ 。

对于  $\lambda = 0$ , 即无放射性衰减时, 上式可简化为

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \frac{x - Vt}{2(D_h t)^{1/2}} + \exp \frac{Vx}{D_h} \operatorname{erfc} \frac{x + Vt}{2(D_h t)^{1/2}} \quad (8.31)$$

若考虑有吸附作用时, 上式变为

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \frac{R_d x - Vt}{2(R_d D_h t)^{1/2}} + \exp \frac{Vx}{D_h} \operatorname{erfc} \frac{R_d x + Vt}{2(R_d D_h t)^{1/2}} \quad (8.32)$$

图 8.6 为表示式(8.31)的曲线族。

在许多实验问题中, 式(8.31)右边的第二项可以忽略, 则可简化为

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \frac{x - Vt}{2(D_h t)^{1/2}} \quad (8.33)$$

当  $4D_h/V^2 \gg 1$  时, 式(8.31)成为式(8.30)的近似式。如果分子扩散可以忽略,  $D_h = a_L V$ ,  $a_L$  称为纵向弥散度, 则  $4a_L/V = 4a_L n/q$  可作为判别放射性衰减影响的准数。

当忽略式(8.30)右边的第二项时, 得

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \exp \frac{Vx}{2D_h} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{4D_h}{V^2} \right)^{1/2} \right]$$

图 8.6 式(8.31)的图示<sup>[47]</sup>

$$x \operatorname{erfc} \frac{x - V[1 + 4 D_h/V^2]^{1/2} t}{2(D_h t)^{1/2}} \quad (8.34)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 式(8.34)简化为

$$c(x) = c_0 \exp \frac{Vx}{2D_h} [1 - (1 + 4 D_h/V^2)^{1/2}] \quad (8.35)$$

此式即弥散方程的稳态解。

在同时存在吸附和放射性衰减作用的情况下, 如果忽略分子扩散作用, 式(8.35)可修改为

$$c(x) = \exp \frac{Vx}{2D_h} [1 - (1 + 4 D_h R_d/V^2)^{1/2}] \quad (8.36)$$

#### 四、平面均匀流中初始有突变界面的弥散

设水流以  $q = \text{const}$  沿  $x$  正向流动, 初始时沿  $y = t g$  的突变界面把渗流分为两个区, 两个区的浓度分别为  $c = c_0$  及  $c = 0$ , 如图 8.7 所示。

这种情况下, 浓度  $c(x, y, t)$  变化的微分方程为

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{q}{n} \frac{\partial c}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_T \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (8.37)$$

式中纵向弥散系数  $D_L = a_L \frac{q}{n} + D_d$

横向弥散系数  $D_T = a_T \frac{q}{n} + D_d$

$a_L$  和  $a_T$  分别为多孔介质的纵向弥散度和横向弥散度。

图 8.7 均匀流中有突变界面的弥散

在  $c = c_0$  区中布置无穷个瞬时源点, 坐标为  $(x, y)$ , 在  $t = 0$  瞬时每个注入的示踪剂质量  $M = c_0 n d d$ , 由此产生平面上在其后任意时刻  $t$  的浓度为

$$c(x, y, t) = \frac{M/n}{4 [D_L D_T]^{1/2} t} \exp \left[ - \frac{(x - \frac{q}{n} t)^2}{4 D_L t} - \frac{(y - \frac{q}{n} t)^2}{4 D_T t} \right] \quad (8.38)$$

$$M/n = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} c(x, y, t) dx dy$$

此式表示浓度的等值线是中心在  $(\frac{q}{n} t, \frac{q}{n} t)$  处的一族椭圆。为了得到从移动的界面产生的浓度分布, 将无穷多个小源点的作用进

行积分, 结果得

$$c(x, y, t) = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \frac{x + \frac{q}{n} t \sin \alpha - y \cos \alpha}{[4(D_L \sin^2 \alpha + D_T \cos^2 \alpha)t]^{1/2}} \quad (8.39)$$

此式表示垂直于移动界面的一种正态分布(见图 8.7)。

如果流动方向与初始界面平行,  $\alpha = 0$ , 并且在初始时刻当  $y = 0$  时  $c = 0$ , 当  $y > 0$  时  $c = c_0$ , 则式(8.39)简化为

$$c(y, t) = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \frac{y}{[4D_T t]^{1/2}} \quad (8.40)$$

表示  $D_T = a_T V$ ,  $x = Vt$ , 上式可写为

$$c(y, t) = \frac{c_0}{2} \operatorname{erfc} \frac{y}{2(a_T x)^{1/2}} \quad (8.41)$$

此式表明过渡带的宽度与  $x^{1/2}$  成比例, 沿  $y$  方向有正态分布, 且  $c(y, t)$  与流速  $V$  无关。

## 五、平面径向流中的弥散

平面上径向流出现在通过完整井对含水层进行人工补给或向油田注入的情况。设含水层中原有的水与注入水的浓度分别为 0 和  $c_0$ 。在这种情况下描述弥散的微分方程为

$$\frac{c}{t} + V \frac{c}{r} = a_L V \frac{c}{r^2} \quad (8.42)$$

式中,  $V = \frac{Q_w}{2rBn}$ ,  $Q_w$  为注水流量,  $B$  为含水层厚度。

由于  $V = V(r)$ , 式(8.42)为一非线性方程, 求精确解析解很困难, 近年虽有人求出 也十分复杂, 这里不拟介绍。下面只举一个常用的近似解, 它是 Josselin de Jong 等人(1959)提出的, 是根据下面两个假定推导得到: 一是示踪剂的浓度十分接近正态分布;

---

D. H. Tang and D. K. Babu, "Analytical solution of a velocity dependent dispersion problem", Water Resources Research Vol. 15, No. 6, 1973.

另一是认为它是由两种作用的线性叠加所产生的,一种作用是纵向弥散,另一种作用是流线的辐射。结果得到的解为

$$\frac{c(r, t)}{c_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{r - r_w}{\frac{4}{3} a_L r} \quad (8.43)$$

方差为 
$$\sigma_r^2 = \frac{2}{3} a_L r - \frac{r_w^3}{r^2} \quad (8.44)$$

式中  $r_w$  为井的半径;  $r$  为注入水体的平均半径,注入水的总体积为

$$V_r = \int_0^t Q_w(t) dt = 2 \pi r B n$$

故 
$$r = \int_0^t Q_w(t) dt / (2 \pi B n) \quad (8.45)$$

## 习 题

### 第一章 流体运动的基本概念和基本方程

1-1 设二维流动的速度场为  $u = -\frac{c y t}{r^2}$ ,  $v = \frac{c x t}{r^2}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $c$  为常数,推出其流线方程。求  $t = 1$  时,通过  $x = 1$ ,  $y = 0$  点的流线,并绘出其流场示意图。

1-2 设流场的速度为  $u = kx(y + z)$ ,  $v = k(y + z)$ ,  $w = -kz(x + y) - z^2$ ,判断是否为可压缩流动。

1-3 圆管中断面上的流速分布为  $u = u_m(1 - \frac{r^2}{r_0^2} = u_m(1 - \frac{x^2 + y^2}{r_0^2})$ ,求线变率、角变率和角转速,并问该流动是否势流?

1-4 强度均为  $60\text{m}^2/\text{s}$  的源和汇,位于  $x$  轴上,距原点均为  $a = 3\text{m}$ ,计算通过  $(0, 4)$  点的流函数值,并求该点的流速。

1-5 沿  $x$  轴正方向的水平流动, 顺时针的势涡和源流相叠加, 求流速分量, 并求其驻点位置。

1-6 试推导二维明槽恒定均匀层流的断面上流速分布关系式, 槽底水平倾角为  $\theta$ , 液体深度为  $h$ 。

1-7 设两同心圆之间的环形窖中的轴向流动为不可压缩恒定层流, 内外管的半径分别为  $r_1$  和  $r_2$  沿轴向压强梯度为  $-\frac{D}{x}$ , 试导出沿径向的轴向流速分布关系式。

1-8 设边界层中流速分布为  $u = U \left(\frac{y}{\delta}\right)^n$ , 求  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{2}{n}$ ,  $\frac{3}{n}$  的表示式, 并计算  $n = \frac{1}{7}$  时这些厚度比的数值。

1-9 设层流边界层内流速分布表示为  $u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$ , 试结合边界条件推导边界层厚度  $\delta$  及壁面摩擦应力  $\tau_0$  的关系式。

1-10 试写出能量方程(1-45)中耗散函数  $\epsilon$  在直角坐标系中的表过式。

### 第三章 紊流的基本方程与紊流模型

3-1 试由雷诺方程(忽略质量力)推求紊流时均流动的能量方程, 并说明该能量方程中各项的物理意义。

3-2 试由 N-S 方程和雷诺方程求出脉动量的动方程, 并说明脉动量动方程中各项的物理意义。

3-3 试以二维平行流为例证明混合长紊流模型  $\nu_t = l^2 \frac{d\bar{u}_1}{dx_2}$  是

k 方程紊流模型的一种物例。

3-4 试比较零方程紊流模型(包括 Boussinesq 涡粘性模型, 混合长度模型及涡量传递模型), k 方程模型和 k-ε 双方程紊流模型中涡粘性系数  $\nu_t$  的计算式, 并比较这几种模型的优缺点。

## 第四章 扩散理论

4-1 何谓拉格朗什积分比尺与欧位积分比尺? 写出其数学表达式说明这两种时间比尺的异同。

4-2 何谓分子扩散与紊动扩散? 分析两者的扩散特性有何异同。

4-3 有一水深为 20m 的水塘, 塘底均匀布满工厂排入的有毒物质进行瞬时排放, 平均排放强度为  $0.1 \text{ kg/m}^3$ 。设塘底近似水平, 底面和边壁对污染物均完全不吸收, 试求一个月后水面处污染物的浓度为多少? 污染物在水中的扩散系数为  $1.0 \text{ cm}^2/\text{s}$ 。

4-4 试证明静止流体中, 在瞬时线源排放情况下等浓度线为同心圆, 写出  $t = t_1$  时该同心圆半径的表达式。

4-5 一无限长管如图所示, 在  $x = 0$  断面上以平面源方式瞬时投放  $1 \text{ kg/m}^2$  的示踪物, 试计算并绘出投放后 3 分钟与 15 分钟, 示踪物沿管道的浓度分布。已知示踪物的扩散系数为  $1.5 \times 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$ 。

4-6 对题 4-5 所述情况, 若等强度连续释放示踪剂, 释放处的浓度  $C_0 = 1 \text{ kg/m}^3$ , 试计算从开始释放后 3 分钟和 10 分钟浓度沿管的分布(点绘成分布图)。

4-7 某河流现场示踪试验, 测得垂向瞬时线源投放点下游



600m 断面上当示踪云团中心到达时横向浓度分布如表所示。试根据此实测资料计算河段的横向扩散系数。已知河宽 80m, 水深 4.5m, 河段平均流速 0.4m/s。

X= 600m 处横向浓度分布表

Y(m)	28	24	20	16	12	8	4	0	- 4	- 8	- 12	- 16	- 20	- 24	- 28
C(ppm)	12	16	20	25	32	42	50	60	52	40	30	24	18	15	10

4-8 在宽度很大的河流中心有一垂向线源排污口, 连续排放流量为  $0.1\text{m}^3/\text{s}$ , 浓度为 150ppm 的污水, 试计算排污口下游 300m 处污染带宽度及断面上最大浓度。若污水浓度不变, 流量增大 1 倍, 试问下游同样位置( 300m)处最大浓度增大多少倍? 已知河段平均水深 3.5m, 平均流速 0.7m/s,  $u^*$  为 0.05m/s 横向扩散系数按  $0.4 hu^*$  计算。

4-9 试由无限空间均匀紊动中点源排放下的浓度分面公式推求有限空间情况下的计算式。此有限空间的边界为两个平行顺直相距为  $2L$  的墙。点源在流场对称轴上, 如图所示。

## 第五章 剪切流中的离散

5-1 在河道上有岸边连续排污口, 河宽 100m, 水深 2.8m 河段平均流速 0.6m/s, 水面比降为 0.0004。试计算污染物由排污口到达对岸所经历的距离及污染物达到全断面均混合所需的距离。

5-2 河流右岸有岸边排污口, 污水浓度为 300ppm, 今欲在下游左岸相距排污断面为 1000m 处设置一工业用水提水站, 其允许浓度为 1.5ppm, 试问上游排污口的限制排污量为多少? (污水排放为连续恒定源) 已知河宽 90m, 河段平均流速 0.62m/s, 平均水深 2.8m, 河道比降为 0.002。若提水站设在右岸。限制的排污量又应为多少?

5-3 某河段的代表性断面如图示。为采用流速分布方法计算河段的纵向扩散系数, 将断面分为 10 个分条, 测量各条的横向座标  $y$ , 水深  $h$ , 平均流速  $\bar{u}$ , 河宽  $w$ , 以及该河段的坡降  $J$ , 试说明计算河段的纵向离散系数的方法, 列出步骤和算式。

5-4 在某河道上通过示踪试验测得释放断面分别为 400m 和 800m 的下游两断面上浓度过程如表 1 及表 2 所列。已知河宽 80m, 平均流速(河宽内) 0.64m/s, 平均水深 3.6m, 河段水面比降为 0.0005。

要求:

- 1 利用上游单站资料计算纵向离散系数  $D_L$
- 2 利用下游单站资料计算  $D_L$
- 3 用两站法计算  $D_L$
- 4 分别用经验公式 5-107, 5-108, 5-109, 5-110 计算  $D_L$

表:1 400m 处浓度过程

t (s)	62	72	82	92	102	112	122	132	142	152	162	172
C(ppm)	2	3	4	6	5	4.2	3.1	2.4	1.6	0.6	0.4	0.1

表:2 800m 处浓度过程

t (s)	280	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380	390
C(ppm)	0.8	2.0	2.8	4.1	3.2	2.7	2.2	1.9	1.2	0.7	0.3	0.1

## 第六章 射流

6-1 一直径  $D = 0.4\text{m}$  圆孔射流沿水平方向射入密度相同的静止水体中出口流量  $Q_0 = 0.35\text{m}^3/\text{s}$ , 试求射流中心流速达到  $0.3\text{m/s}$  的距离。

6-2 静止流体中二维平面射流初始半宽度  $b_0 = 0.1\text{m}$ , 初始流速  $u_0 = 20\text{m/s}$ , 求射程  $x_1 = 2\text{m}$  处射流断面的轴心流速  $u_m$  及平均流速  $u_1$  (断面边界取在  $u = 0.1 u_m$  处)。

6-3 某体育馆的圆柱形送风口, 直径  $d_0 = 0.6\text{m}$ , 风口距比赛区为  $60\text{m}$ 。要求比赛区风速不得超过  $0.3\text{m/s}$ , 问风口的送风量不应超过多少?

6-4 一排污管将生活污水排入水库, 排污管出口为宽矩形, 短边长

度  $0.15\text{m}$ , 出口位于水面以下  $20\text{m}$  处, 出流方向垂直向上, 出射流速  $u_0 = 3\text{m/s}$ , 污水浓度为  $960\text{ppm}$ , 污水密度与库内的密度很小可以忽略, 试求污水到水面处的最大浓度及平均稀释度。

6-5 将上题中出口断面改为  $D = 0.15\text{m}$  的圆形出流孔, 试求污水到达水面处的最大流速, 最大浓度及平均稀释度。

6-6 一圆孔射流射入密度相同的静水中, 出口直径  $D = 0.2\text{m}$ ,  $u_0 = 4\text{m/s}$ , 出口断面示踪物浓度为  $C_0$ , 试求距喷口距离  $X = 4\text{m}$  断面上流量及从中心至  $r = 0.2\text{m}$  范围内所含示踪物占整个断面示踪物量的百分比。

6-7 在水下  $17.2\text{m}$  深处的一个圆形污水排放口。其  $u_0 = 3.1\text{m/s}$ ,  $D = 0.1\text{m}$ ,  $\frac{u_0}{k} = 0.025$ 。试计算垂向排放( $\theta_0 = 90^\circ$ )和水平排 YT ( $\theta_0 = 0^\circ$ )时水面的轴线稀释度  $S_0$  (卷吸系数  $\alpha = 0.082$ )。

6-8 直径  $D = 0.2\text{m}$  的一排污管以初始角  $\theta_0 = 45^\circ$  方向排入海中, 出水口位于海面下  $50\text{m}$  深处, 初始流速  $u_0 = 3.17\text{m/s}$ , 若海水密度均匀, 污水与海水的相对密度差为  $0.02$ , 试绘出浮射流的轨迹。

6-9 排污管将污水排入海中, 出口流速为水平向, 污水浓度  $C_0 = 1200\text{ppm}$ , 出口在海面下的深度为  $26\text{m}$ , 出口直径  $D = 0.25\text{m}$ , 流速  $u_0 = 0.3\text{m/s}$ 。污水与海水间的相对密度差  $\rho/\rho_k = 0.018$ , 试计算污水到达海面处的轴线稀释度及断面平均流速。

6-10 排污孔淹没于海面下  $30\text{m}$  处, 出口流速  $u_0 = 0.5\text{m/s}$ , 污水与海水相对密度差为  $0.0005$ , 出口直径  $D = 0.2\text{m}$ , 试比较射角

$\theta_0 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  三种情况下浮射流到达海面处的轴线稀释度及浮射流厚度。

6-11 射流从垂直方向自渠底射入明渠中(如图) 出口直径  $D = 0.4\text{m}$ , 出口流速  $u_3 = 5\text{m/s}$ , 渠中水深  $h = 12.0\text{m}$ , 渠中流速  $u_a = 0.5\text{m/s}$

- 试估算:
1. 射流不发生弯曲的近区长度
  2. 水深为  $3\text{m}$  处射流平均宽度  $y$
  3. 弯曲区终点位置

## 参 考 文 献

- [1] 清华大学水力学教研组编:《水力学》(1980年修订版)上册,人民教育出版社,1981。
- [2] 清华大学工程力学系编:《流体力学基础》上下册,机械工业出版社,1980、1982。
- [3] Schlichting, H., Boundary Layer Theory, 7th Edition, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1979.
- [4] Tritton, D. J., Physical Fluid Dynamics, VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY, 1977.
- [5] 夏震寰:《紊动力学基础》,清华大学水利系泥沙研究室,1982。
- [6] Hinze, J. O., Turbulence, 2nd edition, McGRAWHILL BOOK COMPANY, 1975.
- [7] Tennekes, H. and Lumley, T.L., A First Course in Turbulence, The MIT Press, 1972.
- [8] 窦国仁:《紊流力学》上册,人民教育出版社,1981。
- [9] 椿东一郎,水力学,森北出版株式会社,1974。  
(中译本《水力学》( ), [日]椿东一郎著,徐正凡译,高等教育出版社,1986。)
- [10] Fischer, H. B., Imberger, J., List, E. J, Koh, R. C. Y., Brooks, N. H., Mixing in Inland and Coastal Waters, Academic Press, 1979。  
(中译本《内陆及近海水域中的混合》,[美]H. B. 费希尔等著,清华大学水力学教研组译,余常昭审校,水利电力出版社,1987。)
- [11] Rodi, W., Turbulent Models for Environmental Problems, Prediction Models for Turbulent Flows, Edited by Kollmann, W. McGRAW-

HILL BOOK COMPANY, 1980.

- [12] Roshko, A., Structure of Turbulent Shear Flows; A New Look, AIAA Journal Vol. 14, No. 10, 1976.
- [13] Taylor, G. I., Diffusion by Continuous Movements, Proc. London Math. Soc. Ser. A, Vol. 20, 1921.
- [14] Taylor, G. I., Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly Through A Tube, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. Vol. 219, 1953.
- [15] Elder, J. W., The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent shear Flows, J. Fluid Mech, Vol. 5, 1959.
- [16] Batchelor, G. K., Diffusion in Free Turbulent Shear Flows, J. Fluid Mech. 3 67, 1957.
- [17] 夏震寰:《现代水力学(三)紊动力学》,高等教育出版社 1992. 8. [18] Aris, R., On The Dispersion of A Solute in A Fluid Flowing Through A Tube, Proc, Roy. Soc. London. Ser. A, Vol 235, 1956.
- [19] Albertson, M. L., Dai, Y. B., Jensen, R. A. and Rouse, H., Diffusion of Submerged Jets, Tran, ASCE, 115, 1950.
- [20] A . . . , eop T p ix C py , MAT , 1960.
- [21] Rajaratnam, N., Turbulent Jets, Amsterdam, Elsevier 1976.
- [22] McGuiirk, J. J. and Rodi, W., The Calculation of Three Dimensional Turbulent Free Jets, Turbulent Shear Flow I, Edited by Durst, F., etal. Berlin, Springer, 1979.
- [23] Lee Hun-Wei, Theory of Buoyant Jets and Its Environmental Applications, 河海大学交流讲义, 1982.
- [24] Rodi, W. edited, Turbulent Buoyant Jets and Plumes, Pergamon Press, 1982.
- [25] Fan Loh-Nien and Brooks, N. H., Numerical Solution of Turbulent Buoyant Jet Problems, W. M. Keck Lab. of Hydraulics and Water Resources, Report No. KH-R-18, 1969.
- [26] Subramanya, K. and Porey, P. D., Trajectory of A Turbulent Cross Jet, J. of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 22, No. 5, 1984.
- [27] Chau, T. L., Lin Jung-Tai and Kennedy J. F., Entrainment and Drag

Forces of Deflected Jets, Proc. ASCE Vol. 102, No. HY5, 1976.

- [28] Wright, S. J., Buoyant Jets in Density-stratified Crossflow, J. of Hydraulic Engineering Vol. 110, No. 5, 1984. ASCE.
- [29] Yu Changzhao, Xiao Zuoting, Zhou Bingliang and Chen Daoyi, Experimental Studies of Turbulent Water Jets, Proc. of The International Conference of Fluid Mechanics, Beijing, 1987.
- [30] Jirka, G. H., Adams, E. E., Stolzenbach, K. D., Buoyant Surface Jets, Proc. ASCE, Vol. 107, No. HY11, 1981.
- [31] Wright, S. J., Mean Behavior of Buoyant Jets in A Crossflow, J. of The Hyd. Div. ASCE, Vol. 103, No. HY5, 1977.
- [32] 陈惠泉、陈燕茹:二元温差出流局部掺混试验研究报告,水利水电科学研究院冷却水研究所,1979。
- [33] 倪浩清、周力行等:浅水渠道突扩浮力回流数学模拟,力学学报,1986年第5期。
- [34] 余常昭:《紊动射流》,高等教育出版社1993.4。
- [35] Yih Chia-Shun, Stratified Flows, Academic Press, 1980.
- [36] 钱宁等:《异重流》,水利出版社,1958。
- [37] Harleman, D. R.F., Stratified Flow, Handbook of Fluid Mechanics, McGRAW-HILL BOOK CO. Inc. 1961.
- [38] 本间仁、林泰造编,水理学,丸善株式会社,1980。
- [39] Craya, A., Theoretical Research on The Flow of Nonhomogeneous Fluids, Houille Blanche, Jan-Feb. 1949.
- [40] 张书农:天然河流垂向扩散规律的探索,水资源保护,(总第1期)1985.8.
- [41] 周克钊、余常昭、张永良:天然河流纵向离散系数示踪实验计算方法研究,环境科学学报,第6卷第3期,1986年9月。
- [42] Valentine, E. M., and Wood, I. R., Longitudinal Dispersion with Dead Zones, J. Hyd. Div. Proc, ASCE, Vol. 103 1977.
- [43] Holley, E. R., and Tsai, Y. H., Effects of Separation Zones on Temporal Moments for Longitudinal Mixing in Rivers, Environmental Effects of Hydraulic Engineering Works, 1978.



- [44] 李玉梁、周雪漪、张永良:用稳态模型计算潮汐河道的水质问题,清华大学学报(自然科学版)第6卷第6期,1986。
- [45] J. H. 塞恩菲尔德著,北京大学地球物理系、技术物理系译:《空气污染——物理和化学基础》,科学出版社,1986。
- [46] Fried, J. J. and Combarous, M. A., Dispersion in Porous Media, Advance Hydroscience 7. 1971.
- [47] Bear, J., Hydraulics of Groundwater, McGRAW-HILL Inc. 1979.
- [48] Bear, J. Dynamics of Fluids in Porous Media, 1972.
- [49] Chin, D. A., Influence of Surface Waves on Outfall Dilution, J. of Hydraulic Engineering, Vol. 113 No. 8 1986, ASCE.
- [50] Yu Changzhao, Lu Shunan, Chen Daoyi, Some Experimental Studies of Turbulent Jets in Wastewater Discharge, Proceedings Vol. , Seventh Congress APD-IAHR, Beijing, Nov. 1990.
- [51] 卞振举:非恒定环境中污染物离散特性的研究,清华大学工学博士学位论文,1991年3月。